Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

В. В. ПРАСОЛОВ

ТРИ КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 62

В. В. ПРАСОЛОВ

ТРИ КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ:

УДВОЕНИЕ КУБА, ТРИСЕКЦИЯ УГЛА, КВАДРАТУРА КРУГА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1992

ББК 22.1 г
П70
УДК 51(091)

Рецензент
доктор физико-математических наук *Н. П. Долбилин*

Прасолов В. В.
П70 Три классические задачи на построение: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. — 80 с. (Популярные лекции по математике; Вып. 62).
ISBN 5-02-014849-0

Книга содержит историю и решения знаменитых задач древности, сыгравших важную роль в становлении математики. Изложение сопровождается интересными сведениями о развитии и методах математики в Древней Греции.
Для широкого круга любителей математики.
Ил. 60. Библиогр. 19 назв.

П $\frac{1602010000-011}{053(02)-92}$ 32-92 **ББК 22.1 г**

Научно-популярное издание

ПРАСОЛОВ Виктор Васильевич

ТРИ КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ:
удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга

Популярные лекции по математике
Выпуск 62

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редактор *Т. А. Панькова*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *А. П. Колесникова*
Корректоры *Н. Д. Дорохова, Л. С. Сомова*

ИБ № 41472

Сдано в набор 07.05.91. Подписано к печати 03.01.92. Формат 84 Х 108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр.-отт. 4,41. Уч.-изд. л. 3,85. Тираж 9700 экз. Заказ № 180. С-011

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в 4-й типографии издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

ISBN 5-02-014849-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

К 1775 году, когда Парижская академия сделала заявление: «Академия постановила не рассматривать отныне представляемые ей разрешения задач удвоения куба, трисекции угла, квадратуры круга, а также машин, долженствующих осуществить вечное движение», сложилось насмешливое отношение ученых к тем, кто пытался решить эти задачи с помощью циркуля и линейки. Полученные через некоторое время доказательства невозможности таких построений привели к тому, что три классические задачи на построение почти совсем потеряли интерес для математиков. Это было уже не вполне справедливо. Три классические задачи сыграли важную роль в становлении древнегреческой математики. Даже один тот факт, что конические сечения первым стал рассматривать Менехм именно в связи с задачей удвоения куба, говорит о многом. Введение более сложных кривых (конхоиды Никомеда, циссоиды Диокла, квадратрисы Гиппия — Динострата) тоже связано с занятиями тремя классическими задачами. Позднее этими задачами много занимались Виет, Декарт и Ньютон.

В неразрешимости трех классических задач с помощью циркуля и линейки древнегреческие математики убедились почти сразу. Но попытки найти решение трех классических задач с помощью циркуля и линейки почему-то во все времена увлекали многих несведущих в математике людей, причем наибольший интерес вызывала задача квадратуры круга. Ламберт, первым доказавший иррациональность числа π, писал: «Я имею некоторое основание сомневаться, что настоящая статья будет прочитана и понята теми, для кого это было бы особенно полезно, теми, которые затрачивают столько времени и труда для отыскания квадратуры круга. Таких искателей всегда будет достаточно, и если судить о будущих по их предшественникам, то это будут по большей части люди, мало смыслящие в геометрии и лишенные возможности правильно оценивать свои силы. Там, где им не хватает знания и понимания, где они не могут ничего сделать с помощью правильных последовательных выводов, там жажда славы и денег создает софизмы, которые чаще всего не отличаются ни особенной тонкостью, ни особенной замысловатостью. Были также случаи, когда эти люди твердо верили, что их мнимые доказательства не встречали одобрения только от зависти и недоброжелательства. Среди них ходит, между прочим, легенда, будто бы в Англии и Голландии назначены столь же высокие премии и награды за квадратуру круга, как за определение географической долготы на море.»

Ламберт был прав: попытки решить три классические задачи с помощью циркуля и линейки не прекратились и после того, как была доказана их неразрешимость. Фанатиков никакие доказательства не интересуют. За время, прошедшее после доказательства неразрешимости, наибольшим успехом этих фанатиков был, пожалуй, принятый в 1897 году законодательным собранием штата Индиана (США) закон о том, что отношение диаметра окружности к ее длине равно 5/16, т. е. $\pi \approx 3{,}2$. В дополнении к этому закону торжественно заявлялось, что предложивший его человек решил еще и задачи трисекции угла и удвоения куба. Закон пытались утвердить весьма умело. Сначала его отправили в комитет по заболоченным землям. Оттуда, сославшись на некомпетентность, его передали в комитет по образованию. Там рекомендовали закон к принятию и вернули его обратно, после чего он был принят единогласно, никто даже не воздержался. В Сенате США в первом слушании закон был тоже принят, но ко второму заседанию сенаторам все же объяснили, что за закон они собираются утвердить. Закон просуществовал девять дней и был отменен Сенатом США.

Таких «решений» мы больше касаться не будем. Большая популярность трех классических задач в Древней Греции привела к тому, что для каждой из них было получено несколько решений, использующих либо специальные кривые, либо специальные инструменты.

Брошюра содержит почти все сохранившиеся древнегреческие решения, а также несколько наиболее интересных позднейших решений. Она основана на лекциях, прочитанных автором для учащихся средних школ № 57 и 444 г. Москвы.

Трем классическим задачам посвящено много книг и журнальных статей. В списке литературы указаны лишь те из них, которые оказали существенное влияние на содержание этой брошюры. Среди них особо хотелось бы выделить комментарии И. Н. Веселовского к «Сочинениям» Архимеда; они содержат переводы почти всех древнегреческих текстов, имеющих отношение к трем классическим задачам.

Я благодарен С. Н. Бычкову за полезные обсуждения рукописи.

Глава 1

УДВОЕНИЕ КУБА

§ 1. Исторический очерк

О возникновении задачи удвоения куба сохранилась следующая легенда: «... во время эпидемии чумы послали афиняне в Дельфы вопросить оракула, что им сделать, чтоб чума прекратилась. Бог ответил им: удвоить алтарь и принести на нем жертвы. А так как алтарь был кубической формы, они взгромоздили на него еще один такой же куб, думая тем исполнить повеление оракула. Когда же чума после этого не прекратилась, отправились они к Платону и спросили, что же теперь делать. Тот отвечал: «Сердится на вас бог за незнание геометрии»,—и объяснил, что следовало подразумевать здесь не простое удвоение, но найти некое среднее пропорциональное и произвести удвоение с его помощью; и как только они это сделали, чума тотчас же кончилась». Эта легенда сравнительно поздняя; в ней многое искажено: задачей удвоения куба занимался еще Гиппократ Хиосский, живший до Платона. Но эту легенду сохранило несколько источников. В ней много интересного: для древних греков совсем не чуждым было мнение, что боги могут гневаться за незнание геометрии.

Для практических целей точное решение задачи удвоения куба не было нужно, но математиков она заинтересовала. Гиппократ Хиосский переформулировал задачу примерно так: «По отрезкам a и $2a$ построить такие отрезки x и y, что $a : x = x : y = y : 2a$». В самом деле, тогда

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2},$$

т. е. $x^3=2a^3$. Эта переформулировка была существенна. Алгебра возникла гораздо позже, и древнегреческие математики произведение двух отрезков представляли как прямоугольник; для сложения двух произведений отрезков приходилось преобразовывать прямоугольники в равновеликие им прямоугольники с общей стороной, чтобы их можно было прикладывать друг к другу: Произведение трех отрезков приходилось рассматривать уже как параллелепипед. Преобразовывать параллелепипеды было бы слишком сложно, а замечание Гиппократа позволяло работать с отношениями отрезков. В дальнейшем все решали задачу именно в формулировке Гиппократа, причем, как правило, в общем виде: отрезок $2a$ заменяли на произвольный отрезок b и строили такие отрезки x и y, что $a:x=x:y=y:b$. В этом случае

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3=\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{b}=\frac{a}{b}=\left(\frac{y}{b}\right)^3,$$

т. е. $x=\sqrt[3]{a^2b}$ и $y=\sqrt[3]{ab^2}$. Решение этой задачи позволяло также для прямоугольного параллелепипеда строить ребро куба, объем которого равен объему параллелепипеда (по этому поводу в одном древнегреческом тексте говорится: «После этого мы сможем вообще любой заданный ограниченный параллелограммами объем превращать в куб...»; этот текст Евдема Родосского, друга и ученика Аристотеля, дает прямое указание на интерес математиков к задаче превращения параллелепипеда в куб). Поясним, как по ребрам p, q и r прямоугольного параллелепипеда можно построить ребро нужного куба. По данным сторонам p и q прямоугольника строить сторону a квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника, умели уже на самом раннем этапе развития древнегреческой математики. Ясно также, что если $a=\sqrt{pq}$ и $b=r$, то $\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{pqr}$.

По разным причинам древнегреческие математики при построениях циркуль и линейку предпочитали всем другим инструментам. Здесь, впрочем, нужно сделать уточнение. Ни о циркуле, ни о линейке в их сочинениях речи нет; говорится лишь о «построениях посредством прямых и окружностей». Более того, для Евклида построение окружности означает не совсем то же самое, что использование циркуля. Согласно третьему постулату Евклида, можно строить лишь окружность с данным центром *A*, проходящую через данную точку *B*. Окружность с центром *A* и радиусом *BC* этот постулат строить не позволял (это построение описано Евклидом в предложении 2 книги I). Циркуль, конечно же, позволил бы выполнять такие построения. По-видимому, формулировка постулата Евклида связана с уходящим в глубокую древность построением окружностей с помощью колышка и привязанной к нему веревки. В этом случае для построения окружности с центром *A* и радиусом *BC* пришлось бы сначала забить колышек в точке *B*, отметить на веревке точку *C*, а затем выдернуть колышек и забить его в точке *A*. Лишь после этого можно было строить требуемую окружность. Такое построение, при котором нужно было забивать колышек не один, а два раза, существенно отличается от элементарного построения.

В Греции циркуль был изобретен в X в. до н. э., задолго до Евклида, в связи с потребностями керамического производства. В это время широкое распространение получил геометрический стиль, и циркуль был нужен для изображения на керамике концентрических окружностей.

Греческая мифология связывает изобретение циркуля с именем Талоса (согласно другим источникам — Пердикса), племянника Дедала. О Талосе пишет древнегреческий историк Диодор Сицилийский (I в. до н. э.): «Точно так же, изобретя циркуль и некоторые другие технические приспособления, он достиг большой славы». Римский писатель Гигин (I в. до н. э.) сообщает: «Пердикс, сын сестры Дедала, изобрел циркуль и пилу из рыбьего хвоста». Об этом изобретении двенадцатилетнего мальчика упоминает даже знаменитый римский поэт Овидий (I в. до н. э.) в поэме «Метаморфозы»:

Первый железным узлом два железных конца съединил он.
Чтобы, когда друг от друга они в расстоянии равном,
Часть стояла одна, другая же круг обводила.

Дедал известен в греческой мифологии как искуснейший изобретатель и архитектор. (Странным образом гораздо более знаменит ныне его неразумный сын Икар, который прославился тем, что, несмотря на подробные наставления отца, так и не научился правильно пользоваться сделанными Дедалом крыльями из перьев, скрепленных воском.) Одаренность отданного ему в обучение племянника, грозившая затмить его славу, вызвала у Дедала зависть, и он столкнул его с акрополя.

* * *

Скорее всего, древнегреческие математики достаточно быстро поняли, что задачу удвоения куба нельзя решить с помощью циркуля и линейки, хотя доказать этого они не могли и, по-видимому, даже не пытались. По поводу того, чем помимо циркуля и линейки можно пользоваться при построениях, у древнегреческих математиков были разные мнения. Первое решение задачи удвоения куба, полученное великим полководцем и математиком Архитом Тарентским, трудно даже назвать построением. Он получил решение как пересечение цилиндра, конуса и тора. Ни о какой практической реализации такого решения не могло быть и речи. Несколько более позднее решение Менехма было уже в некотором смысле оптимальным: он находил решение как пересечение двух конических сечений. Оптимальным это решение было вот в каком смысле. На последнем этапе развития древнегреческой математики, через несколько веков после Менехма, сложилась следующая классификация задач на построение, изложенная александрийским математиком Паппом:

1) плоские задачи (решаемые с помощью прямых и окружностей, т. е. с помощью циркуля и линейки);

2) пространственные задачи (решаемые с помощью конических сечений, т. е. параболы, гиперболы и эллипса; название, по-видимому, связано с тем, что использовались сечения пространственной фигуры — конуса);

3) граммические задачи, решаемые лишь с помощью других, более сложных кривых линий (γραμμή — линия).

Папп писал, что если задачу можно решить с помощью прямых и окружностей, то было бы ошибкой использовать в геометрии для ее решения другие инструменты. Он был уверен, что задачу удвоения куба нельзя решить с помощью прямых и окружностей.

Классификация Паппа неполная. Она не включает построения, использующие специальные инструменты, а такие построения встречались у древнегреческих математиков нередко. Специальные инструменты для решения задачи удвоения куба использовали Эратосфен и Никомед; специальный инструмент использован также в решении, приписываемом Платону.

* * *

После древнегреческих математиков в отношении задачи удвоения куба были получены, пожалуй, лишь два существенных результата. Во-первых, было обнаружено, что эта задача и задача трисекции угла сводятся к решению кубических уравнений, а во-вторых, в 1837 г. было доказано, что эти задачи неразрешимы с помощью циркуля и линейки (в неразрешимости этих задач древнегреческие математики были уверены, хотя и не могли этого доказать). В том, чтобы понять, что задача удвоения куба сводится к решению кубического уравнения, нет, казалось бы, ничего сложного. Но древнегреческие математики никогда не решали геометрические задачи путем сведения их к алгебраическим уравнениям. Их математика была существенно геометрической. Алгебраизация математики началась гораздо позже и шла очень медленно и трудно. Слово «алгебра» вовсе не случайно происходит из арабского языка — арабы действительно очень много сделали для алгебраизации математики.

В XII в. в Европе начали переводить с арабского языка на латинский трактаты древнегреческих и арабских математиков (многие сочинения древнегреческих математиков сохранились лишь в арабских переводах). Греческая математика вернулась в Европу в сильно алгебраизированном виде. Выдающиеся достижения в области алгебры (решение в радикалах уравнений третьей и четвертой степени, теорема Виета) были уже отчасти подготовлены.

В своей книге «Геометрия» (1637 г.) Декарт показал, как геометрические задачи можно сводить к алгебраическим уравнениям. В связи с этим у него возникла задача построения корней многочлена. Декарт нашел очень простой способ строить корни многочленов третьей и четвертой степеней как проекции на ось координат точек пересечения параболы и окружности. Как особо важные частные случаи этого построения Декарт выделил решения задач удвоения куба и трисекции угла и рассмотрел их отдельно.

Некоторое время после появления книги Декарта построением корней занимались почти все крупные математики (Ферма, Ньютон, ван Схоотен, Лопиталь, Лагир, Я. Бернулли, Ролль, Крамер, Эйлер), но интерес к этой задаче угасал столь быстро, что главная теорема, связанная с построением корней, осталась не доказанной, по-видимому, и по сей день. Эта теорема заключается, грубо говоря, в следующем: корни многочлена n-й степени можно построить как проекции на ось координат точек пересечения двух алгебраических кривых, степени которых равны приблизительно $\sqrt{n}$. Последними задачей построения корней занимались Крамер (1704—1752) и Эйлер (1707—1783), но их интерес к ней был уже столь слабым, что они не обратили внимания на почти очевидные вещи. Указанную выше теорему хотя и никто не доказывал, но все же проверяли, чтобы у кривых было больше свободных коэффициентов, которые можно изменять, чем у многочлена (Лопиталь считал это вполне достаточным доказательством). Чтобы избежать ситуации, когда для вещественного многочлена точки пересечения кривых получаются мнимыми, Крамер и Эйлер предложили способ, в котором свободных коэффициентов у кривых было меньше, чем у многочлена, т. е. этот способ годился заведомо не для любого многочлена. Вряд ли Эйлер допустил бы такую ошибку, если бы занимался этой проблемой всерьез.

§ 2. Древнегреческие решения

Решение Архита Тарентского (ок. 428—365 гг. до н. э.)

Первое решение задачи удвоения куба было получено великим полководцем и математиком Архитом Тарентским.

Решение Архита прямое и естественное, но для современного восприятия оно одно из наиболее сложных, потому что оно полностью геометрическое и современная алгебраизация ничем не помогает его понять.

Прежде чем перейти к решению Архита, рассмотрим рис. 1. На этом рисунке изображен полукруг с диаметром AC; из точки P, лежащей на окружности, опущен перпендикуляр PM на диаметр AC, из точки M опущен перпендикуляр MQ на отрезок AP, а из точки Q опущен перпендикуляр QN на диаметр AC. Ясно, что

$$\frac{AC}{AP}=\frac{AP}{AM}=\frac{AM}{AQ},$$

поэтому

$$\frac{AC}{AQ}=\frac{AC}{AP}\cdot\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AM}{AQ}=\left(\frac{AM}{AQ}\right)^3.$$

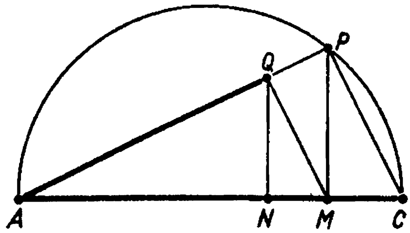

Рис. 1.

В частности, если $AC=2AQ$, то $AM=\sqrt[3]{2}\,AQ$.

Чтобы прийти к рис. 1, поступим следующим образом. Пусть AB и AC — данные отрезки, причем $AB<AC$. Тогда можно считать, что точка B лежит на окружности S с диаметром AC (рис. 2). Рассмотрим три поверхности:

1) цилиндр с основанием S;

2) конус с осью AC и образующей AD, где D — точка пересечения прямой AB и касательной к окружности S в точке C (этот конус получается при вращении прямоугольного треугольника ACD вокруг катета AC);

3) повернем окружность S на 90° вокруг оси AC и будем вращать полученную окружность S' вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости окружности S; в результате получим поверхность вырожденного тора (тор получается при вращении круга относительно оси l, лежащей в плоскости круга и удаленной от него на некоторое расстояние a (рис. 3); если, как в нашем случае, $a=0$, то получаем вырожденный тор).

Пусть P — одна из точек пересечения трех рассматриваемых поверхностей (см. рис. 2); M — проекция

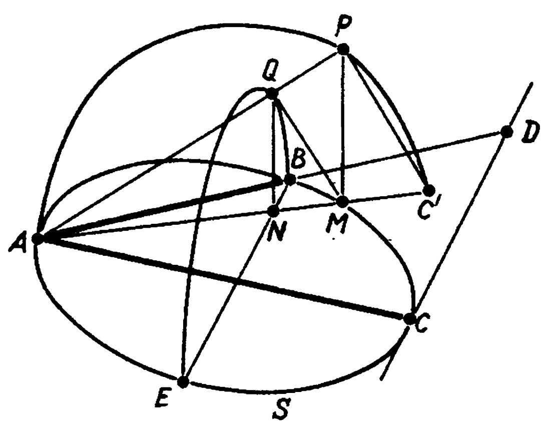

Рис. 2.

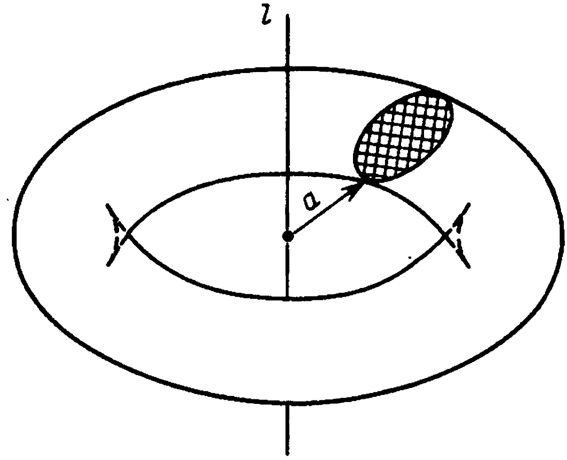

Рис. 3.

точки P на плоскость окружности S. Точка P лежит на поверхности цилиндра, поэтому точка M лежит на окружности S. Проведем через точку B хорду BE, перпендикулярную диаметру AC. Пусть Q — точка отрезка AP, проецирующаяся в некоторую точку N отрезка BE. Так как AP — образующая конуса, то $AQ=AB$. Точка Q лежит на окружности с диаметром BE, поэтому $QN^2=EN\cdot NB=AN\cdot NM$, т. е. точка Q лежит на окружности с диаметром AM и $\angle AQM=90^\circ$. Следовательно, $QM \parallel PC'$. В итоге мы приходим к рис. 1, нужно лишь в обозначениях этого рисунка заменить C на C'. Следовательно, $AC : AP = AP : AM = AM : AB$, а если $AC=2AB$, то $AM=\sqrt[3]{2}AB$.

* * *

Автор первого решения задачи удвоения куба заслуживает того, чтобы привести хотя бы краткую его биографию. В начале IV в. до н. э. пифагорейцы были изгнаны из почти всех греческих колоний в южной Италии. Лишь в Таренте Архит сумел сохранить полуаристократический режим, и этот город остался единственным существенным политическим центром пифагорейцев. В своем городе Архит был очень влиятельным человеком. Диоген Лаэртский писал о нем: «Всяческими своими добродетелями вызывал он всеобщее восхищение и был над своими согражданами военачальником семь раз, тогда как другие по закону не военачальствовали более одного года ... в свое военачальство он ни разу не потерпел поражения; а однажды, когда ему стали завидовать, он отказался от начальства, и войско тотчас было разбито».

Архит был очень дружен с философом Платоном. По-видимому, именно благодаря Архиту Платон хорошо знал математику. А однажды Архит даже спас Платона от смерти. Эту историю рассказал Диоген Лаэртский: «... во второй раз он ⟨Платон⟩ ездил к Дионисию Младшему просить о земле и людях, чтобы жить по законам его Государства ⟨«Государство» — книга Платона⟩. Дионисий обещал, но не дал. Некоторые пишут, что при этом он попал было в беду, оттого что побуждал Диона и Феодота к освобождению острова; но пифагореец Архит в письме к Дионисию добился для него прощения и свободного возвращения в Афины.»

Научные интересы Архита на первый взгляд поражают разнообразием. Самым главным его достижением является решение задачи удвоения куба. Другим важным достижением являются его теоретико-числовые исследования, составившие основу восьмой книги «Начал» Евклида. Кроме того, Архита с полным основанием называли крупнейшим пифагорейским теоретиком музыки. Более близкое знакомство со всеми этими результатами Архита поражает, однако, странным единообразием при таком разнообразии. Решая задачу удвоения куба, он между данными отрезками a и b вставляет отрезки x и y, образующие пропорцию $a:x=x:y=y:b$. В теории чисел Архит исследует, когда между данными натуральными числами a и b можно вставить натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$, образующие пропорцию $a:x_1=x_1:x_2=\ldots=x_{n-1}:x_n=x_n:b$. В теории музыки Архит изучает средние и пропорции: среднее арифметическое $(a-b=b-c$, т. е. $b=(a+c)/2)$, среднее геометрическое $\left(a:b=b:c\right.$, т. е. $\left.b=\sqrt{ac}\right)$ и среднее гармоническое $\left(\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{c}\right.$, т. е. $\left.b=\dfrac{2ac}{a+c}\right)$.

Архит занимался также механикой и, по-видимому, любил мастерить разные приспособления. Диоген Лаэртский писал о нем: «Он первый упорядочил механику, приложив к ней математические основы, и первый свел движение механизмов к геометрическому чертежу». Об изобретениях Архита есть не очень достоверные сведения, будто он изготовил деревянного голубя, который мог летать, и совершенно достоверное сообщение Аристотеля, что Архит изобрел детскую погремушку: «С другой стороны, и дети должны иметь какое-нибудь занимательное дело, и в этом отношении нужно считать прекрасным изобретением ту погремушку Архита, которую дают малым детям, чтобы они, занимаясь ею, не ломали ничего из домашних вещей: ведь то, что молодо, не может оставаться спокойным». Аристотелю приходится поверить, потому что он был лучшим учеником Платона, близкого друга Архита.

Решение Менехма (IV в. до н. э.)

Вслед за Архитом другое решение задачи удвоения куба получил его ученик Евдокс, но об этом решении почти ничего не известно. Поэтому мы перейдем сразу к решению Менехма, ученика Евдокса. На современном алгебраическом языке это решение изложить очень легко. Если даны отрезки a и b и мы хотим найти такие отрезки x и y, что $a:x=x:y=y:b$, то их можно получить, решив любую из двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x^2=ay, \\ y^2=bx \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2=ay, \\ xy=ab. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения решение первой системы уравнений сводится к построению точки пересечения двух парабол (рис. 4), а решение второй системы — к построению точки пересечения параболы и гиперболы (рис. 5). Обе параболы и гипербола проходят через одну точку.

Менехм предложил оба эти решения. Параболу и гиперболу он получал, судя по всему, как сечения

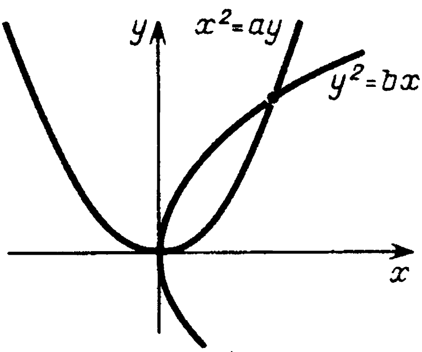

Рис. 4.

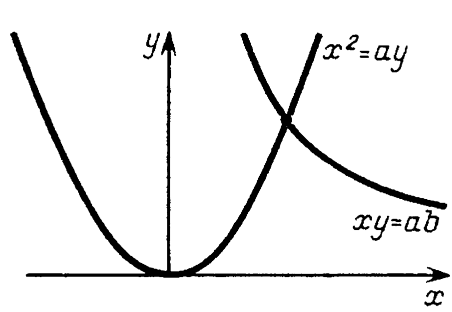

Рис. 5.

конуса (графиков функций древнегреческие математики не рассматривали).

Если фиксировать отрезок a и строить отрезки x и y для различных b, то построение Менехма не очень удобно: для каждого значения b нужно строить новую параболу или гиперболу. Для таких построений более удобно построение Декарта, в котором строятся точки пересечения фиксированной параболы с различными окружностями (см. с. 31).

Решение, приписываемое Платону (428—348 гг. до н. э.)

Евтокий, комментатор сочинений Архимеда, сообщает, что Платон предложил следующее решение задачи удвоения куба. Построим прямоугольный треугольник OAB, катетами которого являются данные отрезки a и b (рис. 6). Если на продолжениях катетов OB и OA нам удастся построить такие точки X и Y, что прямые AX и BY параллельны, а прямая XY им перпендикулярна, то задача удвоения куба будет решена. В самом деле, треугольники AOX, XOY и YOB подобны, поэтому $a:x=x:y=y:b$. Для построения точек X и Y можно воспользоваться инструментом, состоящим из жесткого прямого угла $X'Y'B'$, по стороне $X'Y'$ которого свободно движется перпендикулярная ей прямая $X'A'$. Расположим для этого прямой угол $X'Y'B'$ так, чтобы его сторона $Y'B'$ проходила через точку B, а вершина Y' лежала на прямой AO. Затем передвинем прямую $X'A'$ так, чтобы она проходила через точку A. Нам нужно, чтобы точка X' оказалась при этом на прямой OB. Этого можно добиться, поворачивая наш инструмент.

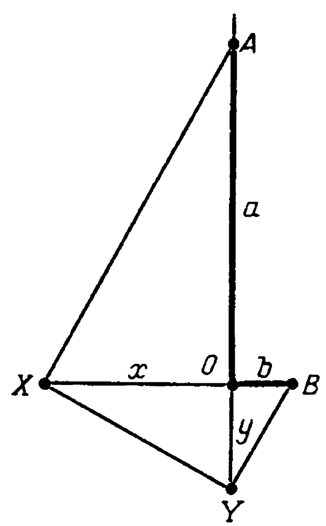

Рис. 6.

Евтокий описал также устройство нужного для построения инструмента. Он состоял из жесткой П-образной рамы, в стойках которой были вырезаны пазы и по ним двигалась рейка (рис. 7). Рассматриваемое построение можно также выполнить с помощью двух прямых углов, двигая сторону одного угла по стороне другого угла (рис. 8).

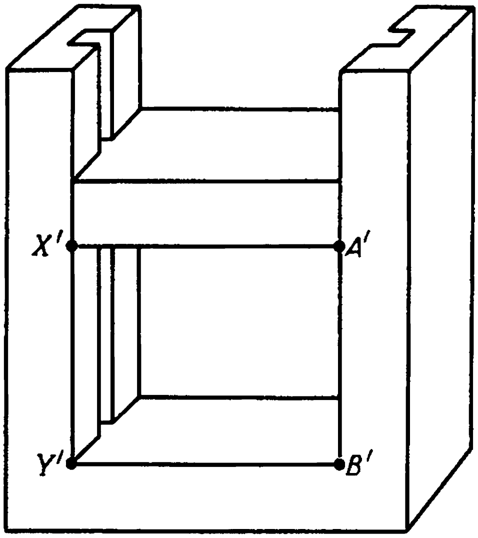

Рис. 7.

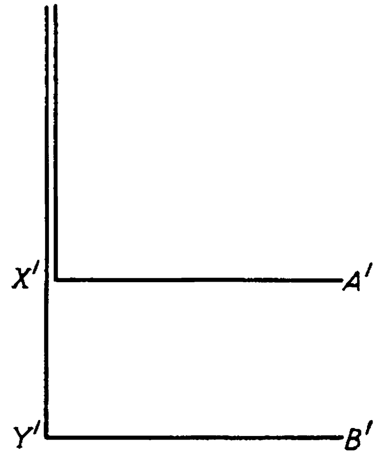

Рис. 8.

Принадлежность этого решения Платону весьма сомнительна. Об этом решении сообщает только Евтокий, а другие источники среди авторов решений задачи удвоения куба Платона не упоминают. Но это не главное. Дело в том, что Платон отвергал механические доказательства как разрушающие все лучшее в геометрии. Он предпочитал идеи в чистом виде. Всерьез рассматривать такое решение Платон действительно не мог. Но не исключено, что это решение он предложил в шутку, насмехаясь над построениями с помощью инструментов, которыми надлежит пользоваться лишь ремесленникам (такую гипотезу высказал известный математик и историк математики Б. Л. ван дер Варден).

Решение Эратосфена Киренского (ок. 276—194 гг. до н. э.)

Круг интересов Эратосфена, современника Архимеда, был очень широк. Он измерил длину земного меридиана. Многим известен его способ нахождения простых чисел — «решето Эратосфена». Ему также принадлежит одно из решений задачи удвоения куба. Это решение использует инструмент, состоящий из трех равных прямоугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$, противоположные стороны которых могут перемещаться по двум параллельным прямым, и на этих прямоугольниках нарисованы их диагонали A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 (рис. 9).

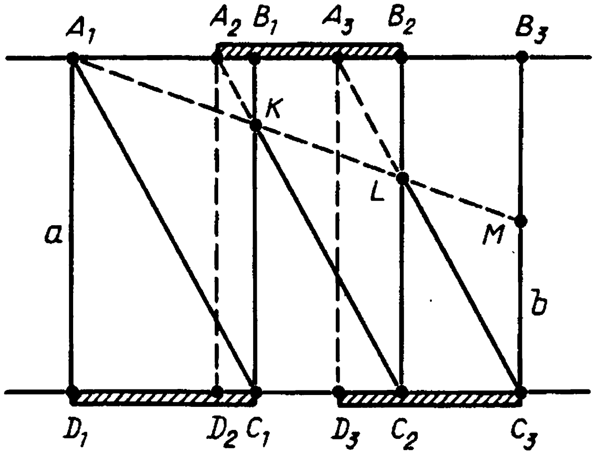

Рис. 9.

Пусть расстояние между прямыми равно данному отрезку a, а на стороне B_3C_3 взята точка M так, что отрезок C_3M равен данному отрезку b. Диагонали A_2C_2 и A_3C_3 пересекают стороны B_1C_1 и B_2C_2 в точках K и L соответственно. Прямоугольники можно сдвинуть так, чтобы точки A_1, K, L и M оказались на одной прямой. Фиксируем для этого прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ и будем двигать прямоугольник $A_2B_2C_2D_2$ так, чтобы точка K прошла путь от точки B_1 до точки C_1. Для каждого положения прямоугольника $A_2B_2C_2D_2$ найдется такое положение прямоугольника $A_3B_3C_3D_3$, что точка L лежит на прямой A_1K. Пусть прямая, на которой лежат точки A_1, K и L, пересекает сторону B_3C_3 в точке M'. Ясно, что если точка K пробегает весь отрезок B_1C_1, то точка M' пробегает весь отрезок B_3C_3, а значит, в некоторый момент она совпадает с точкой M. Когда прямоугольники приведены в нужное положение, трапеции $A_1KC_1D_1$, KLC_2C_1 и LMC_3C_2 подобны, поэтому $a:x=x:y=y:b$, где $x=KC_1$ и $y=LC_2$.

Если вы возьмете три прямоугольника, нарисуете на них диагонали и попробуете осуществить построение Эратосфена, то увидите, что его метод не очень удобен — хлопотно проверять, что точки A_1, K, L и M лежат на одной прямой. Но Эратосфен своим решением очень гордился. Он даже сочинил эпиграмму:

Если из малого куба двойной замышляешь устроить,
Друг, или данный объем к форме другой привести,
Чтоб хорошо удалось тебе это, вздумал ли погреб
Ты измерять, или ров, или широкую пасть
Глуби колодца, возьми на смежных концами пластинках
Средние линии две, сжатые между таблиц.

Не прибегай для этого ты к тяжелым цилиндрам Архита,
Конуса ты не секи, корня Менехма триад;
Также не надо держать с богоравным Евдоксом совета,
Выгнутых линий его формы не надо чертить.
С этими ж ты табличками тысячи средних построишь,
Двигайся смело вперед, с меньших из данных начав.

. . .

Пусть же свершится все это, и каждый смотрящий пусть скажет:
«Это Кирены сын выдумал Эратосфен».

Решение Никомеда (II в. до н. э.)

Весьма распространенным способом решения задач на построение в Древней Греции был способ «вставок» (neusis). Он заключался в том, что через данную точку O проводилась прямая, на которой две данные прямые l_1 и l_2 (или, например, прямая и окружность) высекали отрезок данной длины (рис. 10), т. е. между данными прямыми вставлялся отрезок данной длины, продолжение которого проходило через данную точку. Задачу построения такого отрезка нельзя решить с помощью циркуля и линейки, но для ее решения можно, вообще говоря, использовать линейку с двумя делениями, расстояние между которыми равно длине данного отрезка. Так некоторые древнегреческие математики и делали, но, судя по всему, к построениям с помощью линейки с двумя делениями в Древней Греции относились неодобрительно. Для построений, использующих «вставки», Никомед предложил специальную кривую — конхоиду. Эта кривая строится следующим

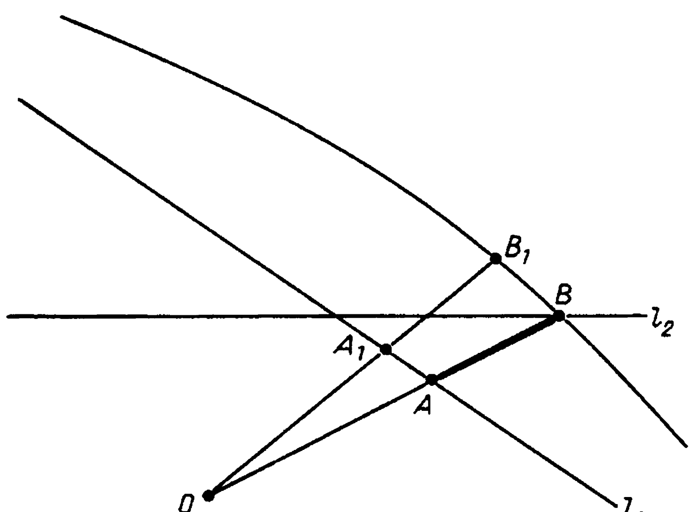

Рис. 10.

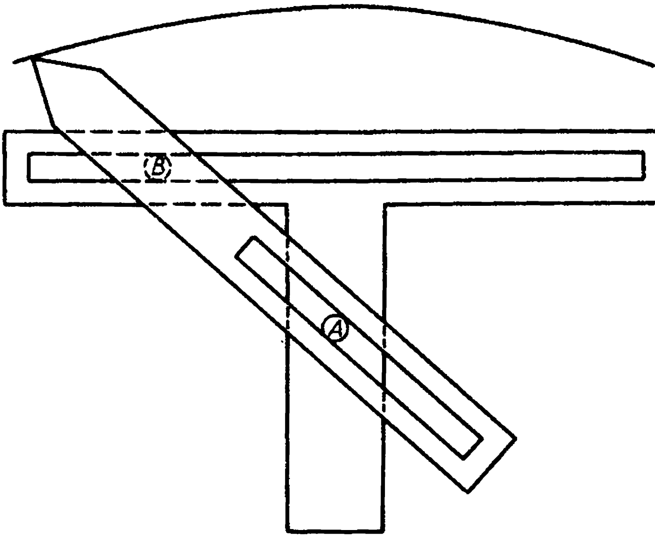

Рис. 11.

образом. Будем вращать вокруг точки O прямую. Пусть A_1 — точка пересечения этой прямой с прямой l_1, а B_1 — такая ее точка, что отрезок A_1B_1 имеет данную длину (см. рис. 10). Кривую, которую заметает при этом точка B_1, и называют *конхоидой*. Точка B пересечения конхоиды и прямой l_2 задает искомую прямую OB.

Никомед изготовил также инструмент для вычерчивания конхоид. Этот инструмент состоял из неподвижной Т-образной рамы с прямолинейной прорезью и шипом A и из подвижной рейки с прорезью и шипом B (рис. 11). Шип A жестко закреплен на раме, а шип B — на рейке. Диаметр шипов равен ширине прорезей. Заостренный конец рейки при движении, направляемом шипами и прорезями, описывает конхоиду (точнее говоря, часть конхоиды).

Способ «вставок» дает возможность производить построения, которые нельзя выполнить с помощью циркуля и линейки. Он, например, легко позволяет разделить любой угол на три равные части (см. с. 37); при этом можно даже ограничиться случаем, когда прямые l_1 и l_2, между которыми нужно вставить данный отрезок, перпендикулярны. Задачу удвоения куба с помощью способа «вставок» решить тоже можно, но это решение существенно сложнее трисекции угла, и прямые l_1 и l_2 уже нельзя считать перпендикулярными (точнее говоря, чтобы решить задачу удвоения куба посредством вставления некоторого отрезка между перпендикулярными прямыми, придется дополни-

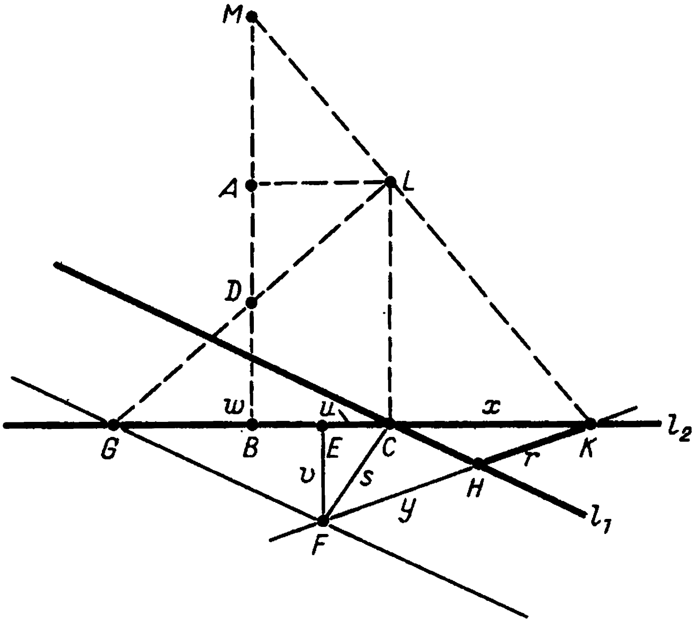

Рис. 12.

тельно произвести сложные построения с помощью циркуля и линейки). Весьма простое построение для решения задачи удвоения куба нашел Никомед, но его доказательство того, что это построение действительно дает нужный отрезок, слишком длинное и сложное, а главное, из доказательства совсем не видно, как это решение можно было найти. Поэтому мы начнем с того, что постараемся понять, каким образом способ «вставок» можно применить к решению задачи удвоения куба.

Пусть даны прямые l_1 и l_2, точка F и отрезок длиной r. Попробуем выяснить, как должны быть расположены эти прямые и точка и каким должно быть число r, чтобы длина x отрезка CK оказалась равной $\sqrt[3]{a^2b}$, где a и b — данные отрезки (рис. 12). Опустим из точки F перпендикуляр FE на прямую l_2 и проведем через точку F прямую FG, параллельную прямой l_1 (G — точка прямой l_2). Чтобы задать расположение прямых l_1 и l_2 и точки F, достаточно задать числа $s=FC$, $u=EC$ и $w=GE$. Числа s, u, w и r нужно подобрать так, чтобы получилось $x=\sqrt[3]{a^2b}$ и отрезки с длинами s, u, w и r легко строились бы с помощью отрезков a и b.

Ясно, что $y=r(u+w)/x=r(u+w)x^2/x^3=cx^2$, где $c=r(u+w)/x^3=r(u+w)/a^2b$. А так как

$$(x+u)^2+(s^2-u^2)=KE^2+EF^2=FK^2=(r+y)^2=(r+cx^2)^2,$$

то

$$x^2+2xu+s^2=r^2+2rcx^2+c^2x^3x=r^2+2rcx^2+c^2a^2bx.$$

Вполне естественно приравнять коэффициенты при x^2, x и x^0. В результате получаем $2rc=1$, $2u=c^2a^2b$ и $r=s$. Следовательно, $2u=c^2a^2b=a^2b/4r^2$, т. е. $8ur^2=ba^2$. Кроме того,

$$u+w=\frac{xy}{r}=\frac{cx^3}{2r^2c}=\frac{a^2b}{2r^2}=4u,$$

т. е. $w=3u$. Итак, числа u и r должны удовлетворять соотношению $8ur^2=ba^2$, а числа s и w задаются равенствами $s=r$ и $w=3u$. Пожалуй, наиболее естественно положить $u=b/2$ и $r=a/2$. Так Никомед и сделал, хотя мы и не можем с уверенностью сказать, что ход его поисков был таким же, как у нас. Но едва ли Никомед смог бы найти это решение, если бы искал его наобум.

Построение Никомеда изображено пунктиром на рис. 12. Построим прямоугольник $ABCL$ со сторонами $AB=a$ и $BC=b$. Пусть D и E — середины сторон AB и BC, G — точка пересечения прямых DL и BC. Построим точку F так, что $FE\perp BC$ и $CF=AD$, а затем через точку C проведем прямую l_1, параллельную прямой GF. Если теперь провести через точку F прямую так, что $HK=CF=AD$, то $CK=\sqrt[3]{AB^2\cdot BC}$ и, как легко проверить, $AM=\sqrt[3]{AB\cdot BC^2}$, где M — точка пересечения прямых AB и KL.

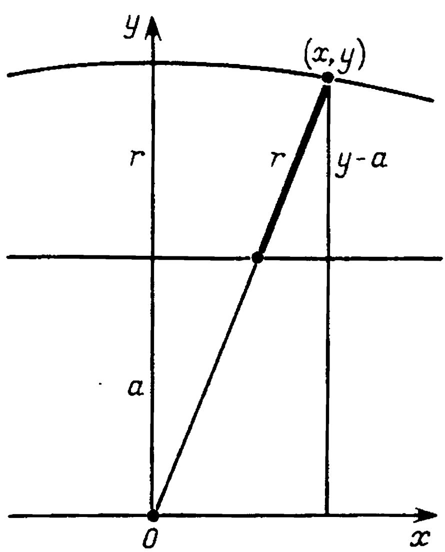

Рис. 13.

Мы не будем воспроизводить доказательство Никомеда, а воспользуемся снова обозначениями рис. 12. Подставляя наши значения чисел u, w, s и r в равенства

$xy=r(u+w)$ и $x^2+2xu+s^2=y^2+2ry+r^2$, получаем $xy=ab$ и $x(x+b)=y(y+a)$. Следовательно,

$$\frac{a}{x}=\frac{y}{b}=\frac{a+y}{x+b} \quad \text{и} \quad \frac{x}{y}=\frac{y+a}{x+b}=\frac{a}{x}=\frac{y}{b}.$$

Никомед в качестве искомых отрезков указал отрезки CK и MA; он, по-видимому, не заметил, что $MA=FH$.

Своим решением Никомед очень гордился и считал, что оно гораздо лучше построения Эратосфена, которое он высмеивал как непрактичное и негеометрическое.

Легко проверить, что конхоида задается уравнением четвертой степени. В самом деле, из рис. 13 видно, что $\sqrt{x^2+y^2}:y=r:(y-a)$, т. е. $(x^2+y^2)(y-a)^2-r^2y^2=0$.

Папп Александрийский показал, что «вставление» отрезка между прямыми можно свести к нахождению точки пересечения окружности и гиперболы. Но наш рассказ о способе «вставок» уже слишком затянулся, поэтому мы отложим обсуждение этого до разговора о трисекции угла (см. с. 37). Тем более что и сам Папп занимался сведением способа «вставок» к пересечению гиперболы и окружности именно в связи с трисекцией угла.

Решения Аполлония, Филона Византийского и Герона

Три математика древности, Аполлоний (III в. до н. э.), Филон Византийский (III в. до н. э.) и Герон (I в. н. э.) в разное время предложили фактически одно и то же решение задачи удвоения куба. Но они не указали, с помощью каких инструментов можно было бы осуществить такое построение.

Рассмотрим прямоугольник $ABDC$, где AB и AC — данные отрезки. Пусть E — точка пересечения диагоналей этого прямоугольника. Для решения задачи удвоения куба достаточно выполнить любое из следующих эквивалентных построений (рис. 14):

1) провести окружность с центром E так, чтобы точка D лежала на отрезке, соединяющем точки пересечения этой окружности с лучами AB и AC (Аполлоний);

2) провести через точку D прямую так, чтобы описанная окружность прямоугольника $ABDC$ и прямые AB и AC высекали на ней равные отрезки GH и DF (Филон);

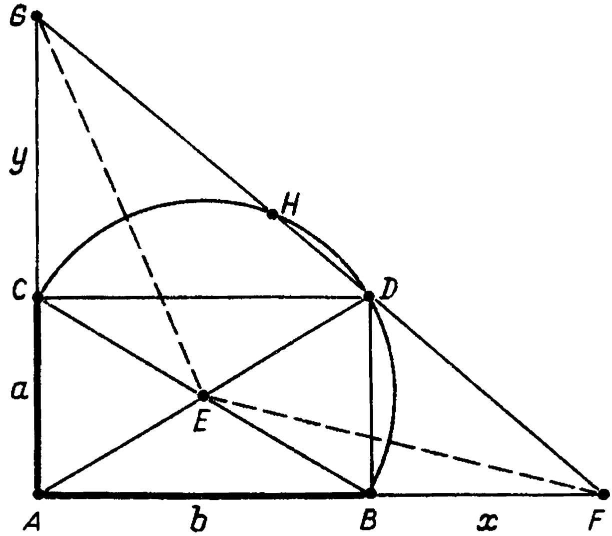

Рис. 14.

3) провести через точку D прямую так, чтобы она пересекала прямые AB и AC в точках, равноудаленных от точки E (Герон).

Построения Аполлония и Герона, очевидно, эквивалентны. Что же касается построения Филона, то достаточно заметить, что точка E лежит на серединном перпендикуляре к отрезку DH, поэтому равенства $GH=DF$ и $GE=EF$ эквивалентны.

Пусть $a=AC$, $b=AB$, $x=BF$ и $y=GC$. Докажем, что $a:x=x:y=y:b$. Из подобия треугольников CGD и BDF следует, что $xy=ab$. Равенство $GE=EF$ можно записать в виде $(y+a/2)^2+b^2/4=(x+b/2)^2+a^2/4$, т. е. $x(x+b)=y(y+a)$. Из равенства $a/x=y/b$ следует, что $(a+y)/(x+b)=a/x=y/b$. Остается воспользоваться равенством $x/y=(y+a)/(x+b)$.

Решения Диокла, Паппа и Спора

Для решения задачи удвоения куба Диокл (II в. до н. э.) предложил использовать кривую, которую впоследствии называли *циссоидой*. Эта кривая получается следующим образом. Проведем в окружности два перпендикулярных диаметра AB и CD. Отложим на дугах BC и BD равные дуги BF и BE. Пусть P — точка пересечения отрезка CE и перпендикуляра, опущенного из точки F на отрезок CD (рис. 15). Когда точка F перемещается по дуге BC, точка P заметает циссоиду Диокла.

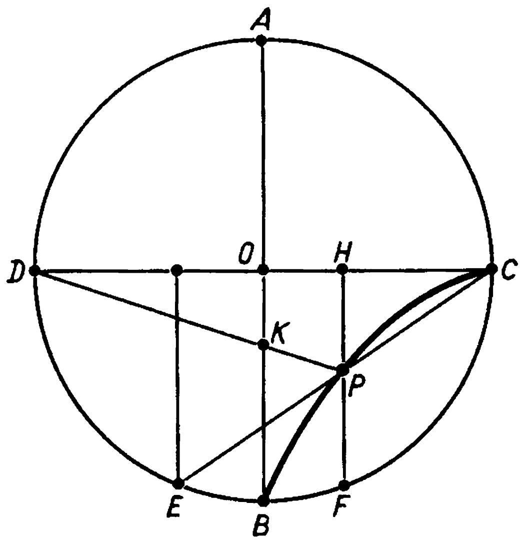

Рис. 15.

Так как $\angle HDF = \angle HFC = \angle HCP = \alpha$, то $DH:HF = HF:HC = HC:HP = \operatorname{tg}\alpha$. Поэтому для построения таких отрезков x и y, что $a:x = x:y = y:b$, где a и b — данные отрезки, причем $a > b$, можно поступить следующим образом. Возьмем на радиусе OB такую точку K, что $DO:OK = a:b$. Пусть P — точка пересечения луча DK и циссоиды. Тогда $DH:HF = HF:HC = HC:HP$ и $DH:HP = a:b$. Следовательно, $x = kHF$ и $y = kHC$, где $k = a/DH = b/HP$.

После Диокла почти такие же решения предложили Папп (III в. н. э.) и Спор. В этих решениях проводилась прямая DK (см. рис. 15), а затем вокруг точки C начинали вращать линейку; нужно было добиться того, чтобы диаметр AB делил отрезок EP пополам (E и P — точки пересечения линейки с окружностью и с прямой DK соответственно).

Пусть радиус рассматриваемой окружности равен a. Введем систему координат Oxy так, что $x = OH$ и $y = HP$. Равенство $DH \cdot HP = HF \cdot HC$ перепишется тогда в виде $(a+x)y = \sqrt{a^2 - x^2}\,(a-x)$, т. е. $y^2(a+x) = (a-x)^3$. Таким образом, циссоида задается уравнением третьей степени (Диокл рассматривал лишь ту часть этой кривой, которая лежит внутри угла BOC).

О древнегреческих инструментах для построения циссоиды не сохранилось никаких достоверных сведений. Поэтому мы опишем такой инструмент, изобретен-

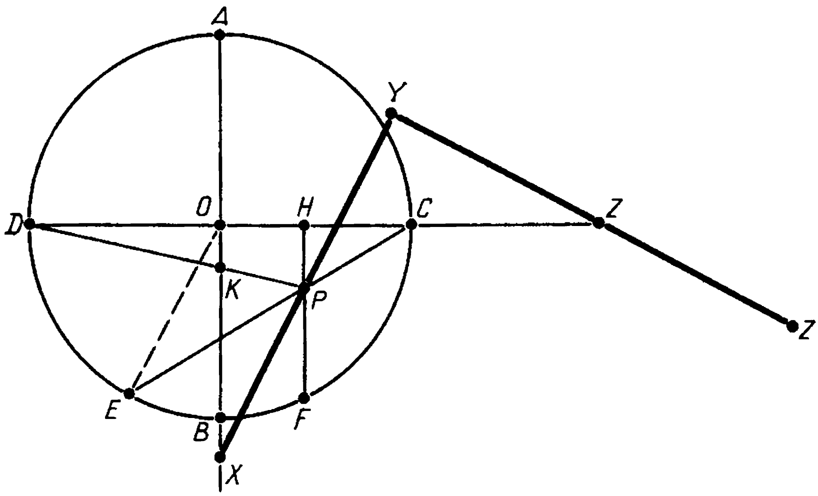

Рис. 16.

ный Ньютоном. Проведем в окружности S перпендикулярные диаметры AB и CD (рис. 16). Возьмем на луче OC такую точку Z, что $OZ=CD$. В качестве инструмента для построения циссоиды Ньютон предложил использовать прямоугольный треугольник XYZ', у которого длина катета XY равна диаметру окружности S. Пусть P — середина отрезка XY. Если точка X движется по прямой AB, а катет YZ' проходит через точку Z, то точка P движется по циссоиде. Докажем это утверждение. Точки O и Y лежат на окружности с диаметром XZ, а отрезки XY и OZ равны диаметру окружности S, поэтому $XOYZ$ — равнобедренная трапеция. Прямая PC соединяет середины ее диагоналей, значит, она параллельна основаниям трапеции и делит отрезок OX пополам. Кроме того, $\angle EPX=\angle YPC=\angle OCP$. А так как $OC=OE$, то $\angle OCP=\angle OEP$. Следовательно, $OE \parallel PX$. В четырехугольнике $EOPX$ диагональ OX делится диагональю EP пополам, а стороны OE и PX параллельны. Поэтому четырехугольник $EOPX$ — параллелограмм и отрезок EP делится диаметром AB пополам, а значит, точка P лежит на циссоиде.

Итерационное решение

С помощью циркуля и линейки за конечное число шагов решить задачу удвоения куба нельзя, но решение методом последовательных приближений получить можно, причем многими разными способами. Одно из таких решений сохранилось в сочинениях Паппа Александрийского. История этого решения загадочна. Человека, который сообщил его Паппу, многие считали хорошим математиком. Их общие друзья попросили Паппа высказать свое мнение по поводу этого решения. Папп раздраженно ответил, что автор сам не понимает, что говорит,— он утверждает, будто нашел решение задачи удвоения куба с помощью лишь циркуля и линейки! Взаимопонимания, как видно, не было. Возможно, они даже не поговорили друг с другом. Произошло, скорее всего, следующее. Некий математик (Папп не упоминает его имени) предложил построение с помощью циркуля и линейки, повторяя которое на каждом шаге можно получать все более и более точные решения задачи удвоения куба. Вряд ли он мог считать, что точное решение получается на третьем шаге, но Папп его понял именно так. Папп без труда убедился, что на третьем шаге точного решения не получается, и от дальнейших обсуждений наотрез отказался. Но все же он привел это решение в своих сочинениях как пример неверных рассуждений.

Папп изложил решение следующим образом. Пусть AB и AD — данные отрезки, причем $AB > AD$ и $AB \perp AD$ (рис. 17). Отложим на перпендикуляре к прямой AB, восставленном из точки B, отрезок BC, равный отрезку AB. Пусть E — точка пересечения прямых AB и CD. Отложим на луче BC отрезок $BL = 5BC$ и разделим его точками C, F, G и K на пять равных частей. Рассмотрим прямоугольник $EBLL'$. Возьмем на отрезке LL' такую точку M, что $LM = AB$. Пусть N — середина отрезка LM. Построим на отрезке LL' такие точки P и Q, что $L'L : L'N = L'N : L'P = L'P : L'Q$. На рис. 18 показано, как построить эти точки: через точку L'

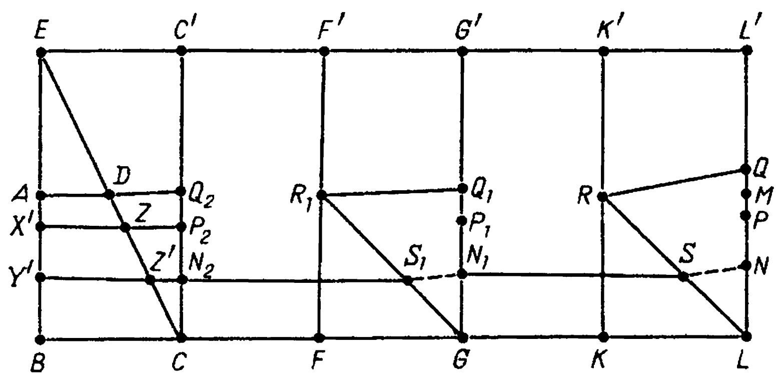

Рис. 17.

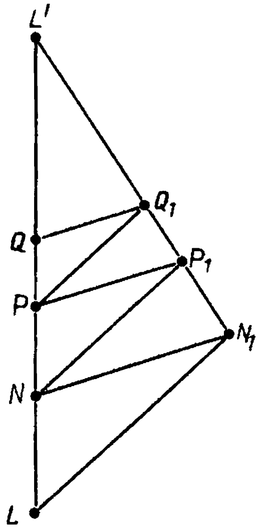

Рис. 18.

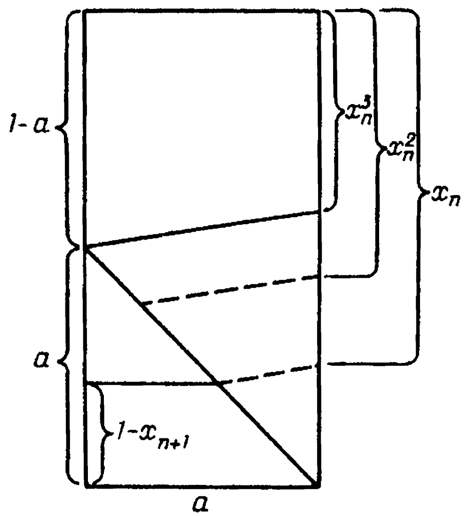

Рис. 19.

проводим произвольную прямую и откладываем на ней отрезок $L'N_1 = L'N$; дальнейшее построение видно из рисунка. Отложим на отрезке KK' отрезок $KR = LM = AB$, а на отрезке LR построим такую точку S, что $SN \parallel RQ$ (см. рис. 17). Затем на отрезке GG' построим такую точку N_1, что $SN_1 \parallel BL$, и для точки N_1 проведем такие же построения, как и для точки N (т. е. построим точки P_1 и Q_1), и повторим их для точки N_2. Если бы оказалось, что $Q_2A \parallel BC$, то $BC : Y'Z' = BE : Y'E = C'C : C'N_2$; $Y'Z' : X'Z = C'N_2 : C'P_2$ и $X'Z : AD = C'P_2 : C'Q_2$. А так как $C'C : C'N_2 = C'N_2 : C'P_2 = C'P_2 : C'Q_2$, то $BC : Y'Z' = Y'Z' : X'Z = X'Z : AD$, т. е. $Y'Z'$ и $X'Z$ — искомые отрезки. Папп, конечно, заметил, что прямая Q_2A не обязательно параллельна прямой BC, но он не заметил более глубоких свойств этого построения.

Докажем, что при последовательном повторении построения угол между прямыми Q_nR_n и BL стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^3 = 1 - a$ (рис. 19). Ясно, что $\dfrac{a}{1 - x_{n+1}} = \dfrac{1 - x_n^3}{1 - x_n}$, т. е. $1 - x_{n+1} = a\,\dfrac{1 - x_n}{1 - x_n^3}$. Предположим сначала, что $0 < x_n^3 < 1 - a$. Тогда, с одной стороны, $1 - x_{n+1} = a\,\dfrac{1 - x_n}{1 - x_n^3} < 1 - x_n$, так как $1 - x_n^3 > a$. С другой стороны, $1-x_{n+1}=\frac{a}{1+x_n+x_n^2}>\frac{a}{1+\sqrt[3]{1-a}+(\sqrt[3]{1-a})^2}=a\,\frac{1-\sqrt[3]{1-a}}{1-(1-a)}=$ $=1-\sqrt[3]{1-a}$, т. е. $x_{n+1}<\sqrt[3]{1-a}$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и монотонно возрастает, поэтому она имеет предел. Если $1-a<x_n^3<1$, то рассуждения аналогичны. Таким образом, процесс построения сходится для произвольной точки N, взятой на отрезке LL'. Но чем ближе $L'N/L'L$ к $\sqrt[3]{1-a}$, тем лучше сходимость. Автор решения задачи удвоения куба для $\sqrt[3]{1-0{,}5}=\sqrt[3]{0{,}5}\approx 0{,}79$ выбрал приближение $L'N/L'L=3/4=0{,}75$. Он, по-видимому, достаточно хорошо понимал, что делал.

§ 3. Более поздние решения

Решение Виета (1540—1603)

Франсуа Виет предложил простое решение задачи удвоения куба способом «вставок». Пусть даны отрезки a и b и нужно построить такие отрезки x и y, что $a:x=x:y=y:b$. Можно считать, что $a>b$. Построим окружность радиуса $a/2$ с центром A и возьмем на ней такие точки B и C, что $BC=b$. Отложим на луче BC отрезок $BD=2BC$ и проведем через точку B прямую l, параллельную прямой AD. Вставим теперь между прямыми l и BC отрезок GH длиной $a/2$, продолжение которого проходит через точку A (рис. 20). Если прямая

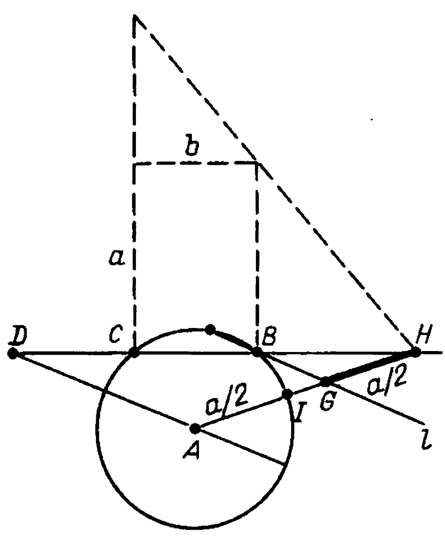

Рис. 20.

GH пересекает окружность в точке I, то $x=HB$, $y=HI$. Виет доказывал это утверждение непосредственно, мы же вместо этого покажем, как его построение связано с построением Никомеда. Пунктирные линии на рис. 20 устанавливают эту связь (достаточно сравнить этот рисунок с рис. 12).

Построение Декарта (1596—1650)

Пусть даны отрезки a и b и нужно построить такие отрезки x и y, что $a:x=x:y=y:b$, т. е. $x^3=a^2b$ и $y^3=ab^2$. Как мы уже говорили, Менехм строил эти отрезки, рассматривая точки пересечения кривых $x^2=ay$ и $y^2=bx$. Легко проверить, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2=ay, \\ y^2=bx \end{cases}$$

эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-bx-ay=0, \\ x^2=ay. \end{cases}$$

Первое уравнение задает окружность с центром $(b/2, a/2)$, проходящую через начало координат.

Декарт предложил строить отрезки x и y, рассматривая точки пересечения параболы $x^2=ay$ и окружности с центром $(b/2, a/2)$, проходящей через начало координат (на рис. 21 изображен случай $a=2$, $b=1$; в этом случае $x=\sqrt[3]{4}$ и $y=\sqrt[3]{2}$).

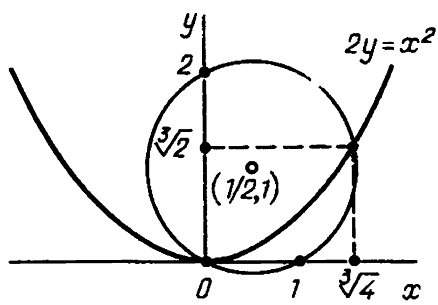

Рис. 21.

Аналогичным образом можно построить корни кубического уравнения $x^3=px+q$. Рассмотрим для этого систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2, \\ x^2+y^2-\beta x-\alpha y=0. \end{cases}$$

Тогда $x^2+x^4-\beta x-\alpha x^2=0$, т. е. либо $x=0$, либо $x^3=(\alpha-1)x+\beta$. Если $\alpha=p+1$ и $\beta=q$, то проекции на ось Ox точек пересечения (отличных от начала координат) параболы $y=x^2$ и окружности $x^2+y^2-\beta x-\alpha y=0$ являются корнями уравнения $x^3=px+q$.

Для построения корней уравнения четвертой степени $x^4=px^2+qx+r$ можно рассмотреть точки пересечения параболы $y=x^2$ и окружности $x^2+y^2-\beta x-\alpha y-\gamma=0$, где $\alpha=p+1$, $\beta=q$, $\gamma=r$.

Инструмент Декарта

Помимо решения задачи удвоения куба с помощью параболы и окружности, Декарт предложил также специальный инструмент для решения этой задачи и ее обобщений. Этот инструмент изображен на рис. 22. Он состоит из стержней XY и YZ, шарнирно соединенных в точке Y, стержня AB, который неподвижно прикреплен в точке A к стержню XY перпендикулярно ему, и стержней, которые могут перемещаться по лучам YX и YZ, все время оставаясь перпендикулярными одному из них. В исходном положении, когда инструмент сложен, лучи YX и YZ совпадают, а все стержни сдвинуты к точке A. Затем лучи YX и YZ начинают раздвигать, постепенно увеличивая угол XYZ; стержни при этом перемещаются, толкая друг друга. Ясно, что

$$YA:YB=YB:YC=YC:YD=YD:YE=\ldots$$

Если $YA=a$ и точка D лежит на окружности радиуса b с центром Y, то отрезки $x=YB$ и $y=YC$ обладают тем свойством, что $a:x=x:y=y:b$. Инструмент Декарта с достаточно большим числом стержней позволяет

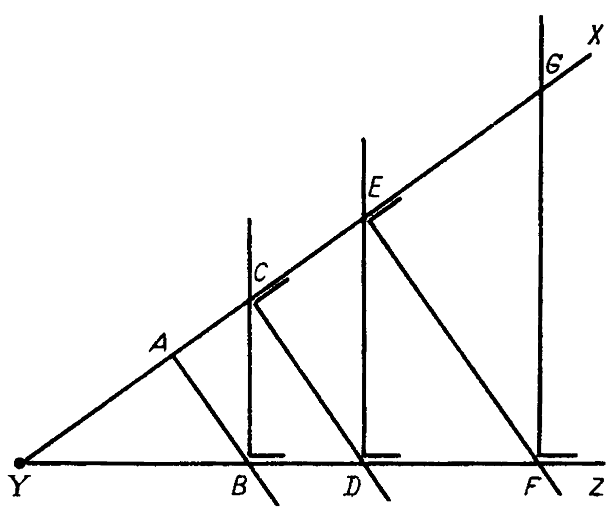

Рис. 22.

также построить такие отрезки $x_1, \ldots, x_n$, что

$$a : x_1 = x_1 : x_2 = \ldots = x_{n-1} : x_n = x_n : b.$$

Этот инструмент Декарт изобрел в молодости, почти за 20 лет до того, как он написал свою знаменитую книгу «Геометрия». Уже в то время он занимался построением корней кубических уравнений.

Построение Ньютона (1642—1727)

После Декарта построением корней уравнений много занимался Ньютон. В связи с этим он нашел несколько разных решений задачи удвоения куба способом «вставок». Мы не будем приводить все его решения, а ограничимся лишь одним из тех его построений, которые позволяют решать более общую задачу — строить корни уравнения $x^3 = qx + r$. Ньютон не объяснял, как он придумывал свои решения. Но чтобы его построение было легче понять, мы расскажем, как к нему можно было бы прийти.

Рассмотрим треугольник CXK со сторонами $KX = a$, $KC = b$, $CX = c$. Пусть точка A лежит на прямой KC и $AC = d$. Вставим между прямыми $l_1 = XA$ и $l_2 = XC$ отрезок EY длиной d, продолжение которого проходит

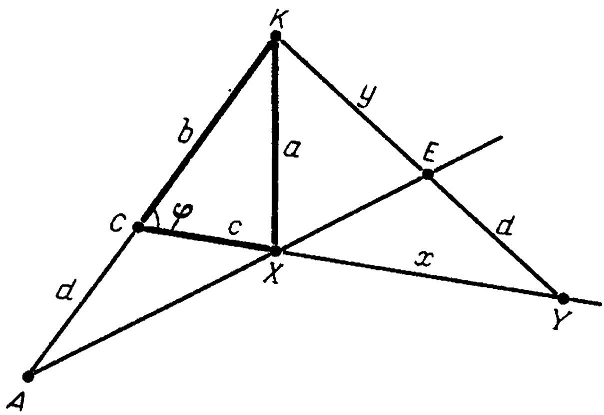

Рис. 23.

через точку K (рис. 23). Пусть $XY = x$ и $KE = y$. Применив теорему Менелая (см. [Прасолов, 1991, задача 5.58]) к треугольнику KCY и точкам A, X, E, получим

$$\frac{KA}{AC} \cdot \frac{CX}{XY} \cdot \frac{YE}{EK} = 1, \text{ т. е. } \frac{b+d}{d} \cdot \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} = 1.$$

Следовательно,

$$y = c(b+d)/x. \qquad (1)$$

Кроме того, $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos\angle KCX=\frac{b^2+(c+x)^2-(d+y)^2}{2b(c+x)}$, а значит,

$$(c+x)\left(b^2+c^2-a^2\right)=c\left(b^2+(c+x)^2-(d+y)^2\right). \qquad (2)$$

Выразим y по формуле (1) и подставим в (2). После несложных преобразований получим

$$(x+c)\left(cx^3-\left(b^2-a^2\right)x^2+c\left(b^2-d^2\right)x-c^2(b+d)^2\right)=0.$$

Нам нужно, чтобы уравнение

$$x^3-\frac{b^2-a^2}{c}x^2+\left(b^2-d^2\right)x-c(b+d)^2=0$$

совпало с уравнением $x^3-qx-r=0$. Для этого должны выполняться следующие условия: $a=b$; $b^2-d^2=-q$; $c(b+d)^2=r$. Пусть B — такая точка, что C — середина отрезка AB. Ньютон полагает $KA=b+d=n$ — произвольный отрезок, $CX=c=r/n^2$ и $KB=b-d=-q/n$. В результате получается построение, которое он описывает примерно такими словами: «Возьмем на произвольной прямой отрезок $KA=n$ и отложим на ней отрезок $KB=q/n$ в том же направлении, что и KA, если $q<0$, и в противоположном направлении, если $q>0$. Построим середину C отрезка AB и проведем окружность

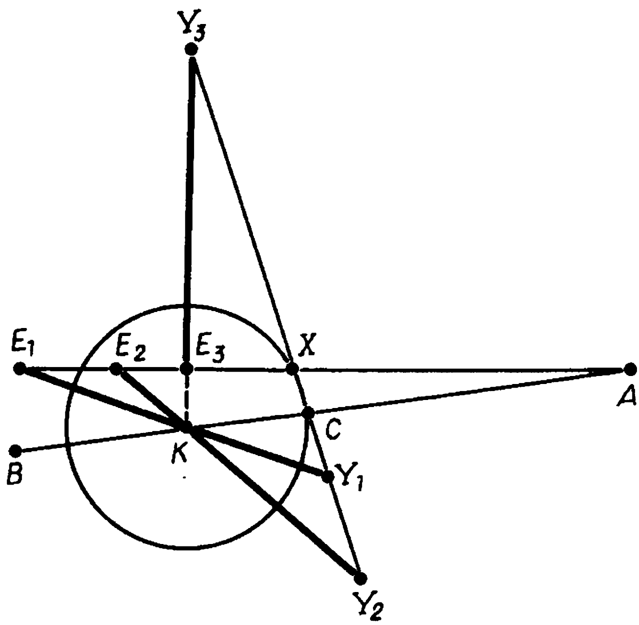

Рис. 24.

радиуса KC с центром K. Построим хорду $CX = r/n^2$. Наконец, вставим между прямыми CX и AX отрезок EY длиной CA так, чтобы его продолжение проходило через точку K. Тогда XY будет корнем уравнения. Если $r < 0$ и лучи XC и XY сонаправлены, то отрезок XY соответствует положительному корню.»

Рассмотрим, например, уравнение

$$(x+1)(x+2)(x-3)=0,$$

т. е. $x^3 = 7x + 6$, и возьмем $KA = 4$. Построение корней этого уравнения способом Ньютона изображено на рис. 24 (корнями являются отрезки XY_1, XY_2 и XY_3; длины отрезков Y_1E_1, Y_2E_2 и Y_3E_3 равны CA).

Покажем, как способом Ньютона можно решить задачу удвоения куба. Пусть даны отрезки m и n и нужно построить такие отрезки x и y, что $n : x = x : y = y : m$, т. е. $x^3 = mn^2$. Возьмем $KA = n$. Тогда $KB = 0$, т. е. $B = K$, а значит, C — середина отрезка AK, и $CX = mn^2/n^2 = m$. Построение выполнимо, если $m < n$.

Глава 2

ТРИСЕКЦИЯ УГЛА

§ 1. Исторический очерк

О возникновении задачи трисекции угла (т. е. деления угла на три равные части) никаких интересных легенд нет. По-видимому, она появилась внутри самой математики в связи с решением задачи о построении правильных многоугольников. Построение правильного пятиугольника циркулем и линейкой должно было произвести на пифагорейцев большое впечатление, потому что правильная пятиконечная звезда была их опознавательным знаком (она символизировала здоровье). Известна следующая легенда. Один пифагореец умирал на чужбине и не мог заплатить человеку, который за ним ухаживал. Перед смертью он велел ему изобразить на своем жилище пятиконечную звезду: если когда-нибудь мимо будет идти пифагореец, он обязательно спросит о ней. И действительно, несколько лет спустя некий пифагореец увидел этот знак и вознаградил хозяина дома.

С помощью циркуля и линейки для $n=6$ и 8 правильные n-угольники построить можно, а для $n=7$ и 9 нельзя. Построение правильного семиугольника — интересная задача, и она даже отчасти связана с тематикой нашей брошюры: ее можно решить с помощью способа «вставок». Построение правильного семиугольника предложил Архимед. Но эта задача лежит все же несколько в стороне от главной нашей темы. А вот попытки построить правильный девятиугольник как раз и должны были привести к задаче трисекции угла, потому что для построения правильного девятиугольника нужно было построить угол $360°/9=120°/3$, т. е. разделить угол $120°$ на три равные части.

§ 2. Древнегреческие решения

При решении задачи трисекции угла можно ограничиться случаем острого угла, потому что если $\varphi > 90^\circ$, то $\varphi/3 = (\varphi - 90^\circ)/3 + 30^\circ$, а угол 30° легко построить циркулем и линейкой.

Решение способом «вставок»

Как мы уже говорили, с помощью «вставок» (см. с. 20) разделить угол на три равные части очень легко. Возьмем на стороне угла с вершиной B произвольную точку A и опустим из нее перпендикуляр AC на другую сторону (рис. 25). Проведем через точку A луч l, сонаправленный с лучом BC. Вставим теперь между лучами AC и l отрезок DE длиной $2AB$ так, чтобы его продолжение проходило через точку B. Тогда $\angle EBC = \angle ABC/3$. В самом деле, пусть G — середина отрезка DE. Точка A лежит на окружности с диаметром DE, поэтому $AG = GE = DE/2 = AB$. Треугольники BAG и AGE равнобедренные, поэтому $\angle ABG = \angle AGB = 2\angle AEG = 2\angle EBC$.

Папп Александрийский показал, что задача «вставления» отрезка между данными перпендикулярными прямыми l_1 и l_2 сводится к построению точки пересечения окружности и гиперболы. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, продолжения сторон BC и CD которого являются данными прямыми, а вершина A является данной точкой, через которую нужно провести прямую, пересекающую прямые l_1 и l_2 в таких точках E и F, что отрезок EF имеет данную длину (рис 26). Достроим треугольник DEF до параллелограмма $DEFG$. Для

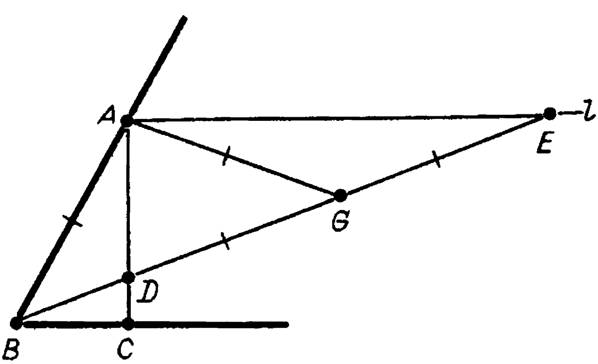

Рис. 25.

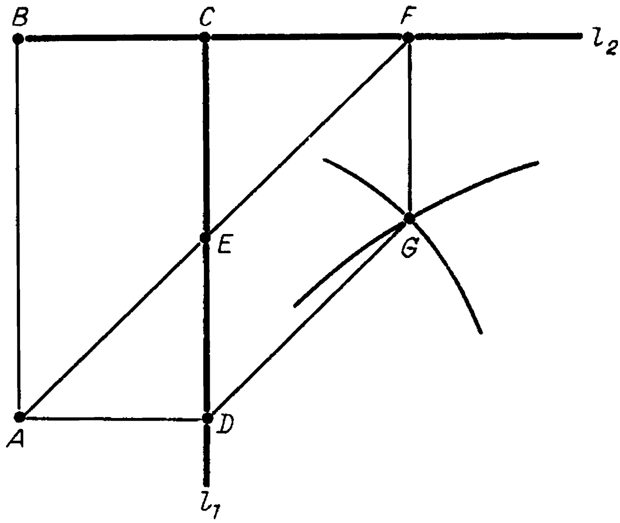

Рис. 26.

построения искомой прямой достаточно построить точку G, а затем через точку A провести прямую, параллельную прямой DG. Точка G удалена от точки D на данное расстояние $DG = EF$, поэтому точка G лежит на окружности, которую можно построить. С другой стороны, из подобия треугольников ABF и EDA получаем $AB : ED = BF : AD$, т. е. $ED \cdot BF = AB \cdot AD$. Следовательно, $FG \cdot BF = AB \cdot AD = S_{ABCD}$, т. е. точка G лежит на гиперболе (если направить оси Ox и Oy по лучам BF и BA, то эта гипербола задается уравнением $xy = S_{ABCD}$).

Это построение почти без изменений можно применить и в случае неперпендикулярных прямых l_1 и l_2.

Решение Архимеда (ок. 287—212 гг. до н. э.)

Другое решение задачи трисекции угла способом «вставок» предложил Архимед. В его решении нужно вставить отрезок данной длины между прямой и окружностью. Рассмотрим угол ADE; можно считать, что D — центр окружности, а точки A и E лежат на окружности. Проведем через точку A прямую так, чтобы окружность и прямая DE высекали на ней отрезок BC, длина которого равна радиусу окружности (рис. 27). Тогда $\angle BDC = \angle ADE/3$. В самом деле, $\angle ADE = \angle ACD + \angle CAD$, а так как треугольники CBD и ADB равнобедренные, то $\angle BCD = \angle BDC$ и $\angle ABD =$

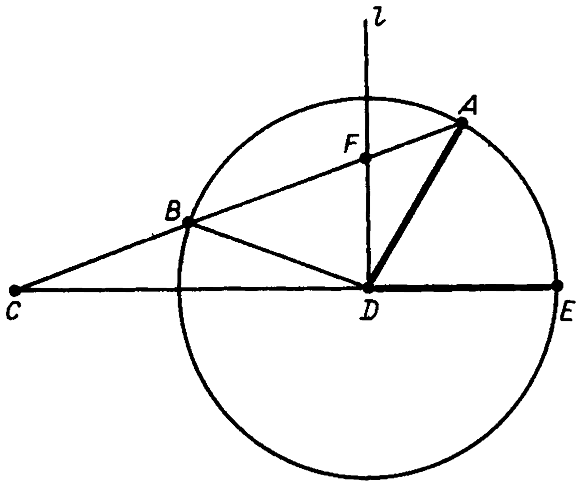

Рис. 27.

$= \angle BAD$, поэтому $\angle ACD + \angle CAD = \angle BDC + 2\angle BDC = 3\angle BDC$.

Для трисекции угла способом Архимеда удобно использовать линейку с двумя делениями, расстояние между которыми равно радиусу окружности. Можно слегка изменить способ Архимеда и использовать для трисекции угла линейку с двумя делениями, расстояние между которыми равно не радиусу, а диаметру окружности. Рассмотрим для этого прямоугольный треугольник CDF, гипотенуза CF которого лежит на прямой CA (см. рис. 27). Точка B является серединой гипотенузы CF, поэтому $CF = 2CB = 2DE$. Значит, для трисекции угла ADE нужно восставить из точки D перпендикуляр l к прямой DE и вставить между прямыми DC и l отрезок CF длиной $2DE$ так, чтобы прямая CF проходила через точку A.

Прямые решения с помощью гиперболы

Находя точки пересечения гиперболы и окружности, угол можно разделить на три равные части и непосредственно, без использования способа «вставок». Папп привел два таких решения, причем в обоих решениях гипербола одна и та же, но задается она по-разному.

Пусть на дуге AC окружности требуется построить такую точку B, что $\smile BC = \smile AC/3$, т. е. $\angle BCA = 2\angle BAC$. Рассмотрим для этого геометрическое место точек (ГМТ) X, для которых $\angle XCA = 2\angle XAC$. Папп, по

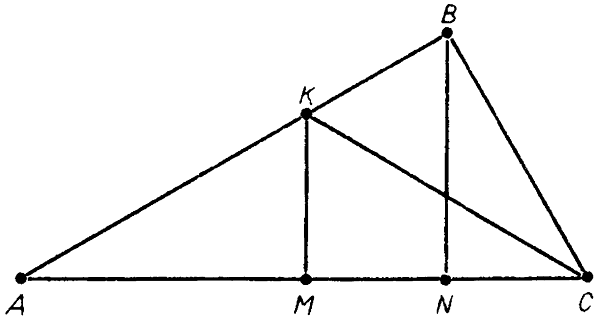

Рис. 28.

сути дела, привел два разных доказательства того, что это ГМТ является гиперболой.

Более простое из этих доказательств было известно до Паппа. Проведем в треугольнике ABC высоту BN и биссектрису CK; пусть M — середина стороны AC (рис. 28). Так как $AC:BC=AK:KB=AM:MN$, то $BC:MN=AC:AM=2$. Соотношение $BC:MN=2$ означает, что точка B лежит на гиперболе (в системе координат с осью Ox, направленной по лучу AC, эта гипербола задается уравнением $(a-x)^2+y^2=4(x-a/2)^2$, где $a=AC$).

Другое доказательство предложил сам Папп. Проведем в треугольнике ABC высоту BD и отложим на луче CA такие точки E, F и G, что $CE=2CD$, $CF=3CD$ и $CG=AC/3$ (рис. 29). Так как $\angle BEC=\angle BCE=2\angle BAC$ и $\angle BEC=\angle BAC+\angle ABE$, то $\angle BAC=\angle ABE$, а значит, $AE=BE$. Поэтому из равенств $BD^2=BE^2-ED^2=BE^2-EF^2$ и $AD\cdot AF=(AE+EF)(AE-EF)=AE^2-EF^2$ следует, что $BD^2=AD\cdot AF=3AD\cdot DG$. Соотношение $BD^2=3AD\cdot DG$ означает, что точка B лежит на гипер-

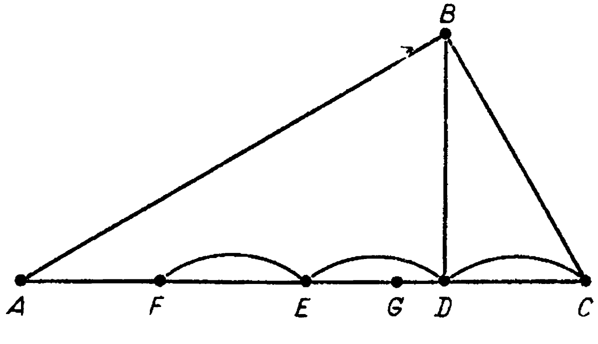

Рис. 29.

боле (в прежней системе координат эта гипербола задается уравнением $y^2=3x(x-2a/3)$; легко проверить, что это уравнение эквивалентно полученному ранее уравнению $(a-x)^2+y^2=4(x-a/2)^2$.

Деление угла в заданном отношении

По классификации Паппа задача трисекции угла относится к «пространственным» построениям, т. е. к построениям, выполнимым с помощью конических сечений. Для деления угла в произвольном заданном отношении нужны более сложные кривые; известны два древнегреческих решения этой задачи.

Первое решение принадлежит Гиппию (V в. до н. э.). Дальнейшая история изобретенной им кривой не совсем ясна. Дело в том, что впоследствии ее использовали еще и для решения задачи квадратуры круга. Скорее всего, такое ее применение открыл Динострат, брат Менехма, но не исключено, хотя и очень маловероятно, что это сделал и сам Гиппий. За этой кривой утвердилось название *квадратриса Динострата*. Она получается следующим образом. Рассмотрим квадрат $ABCD$. Пусть концы отрезка BC равномерно движутся по прямым BA и CD, а отрезок AB равномерно вращается вокруг точки A, причем в положение AD оба отрезка приходят одновременно (рис. 30). Пусть, далее, в некоторый момент отрезок BC переместился в положение $B'C'$, а отрезок AB

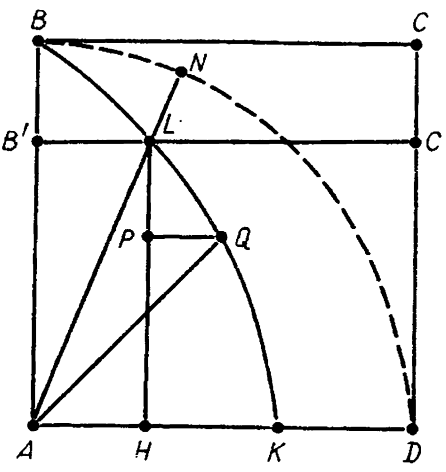

Рис. 30.

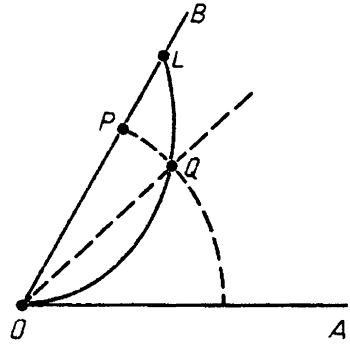

Рис. 31.

переместился в положение AN; L — точка пересечения отрезков $B'C'$ и AN. Гиппий рассмотрел кривую, состоящую из всех точек L. Чтобы разделить в требуемом отношении угол NAD, опустим из точки L перпендикуляр LH на прямую AD и разделим отрезок LH точкой P в этом отношении. Пусть Q — такая точка квадратрисы, что $PQ \| BC$. Из определения квадратрисы следует, что $\angle LAQ : \angle QAK = LP : PH$, т. е. AQ — искомый луч.

Второе решение использует *спираль Архимеда* (сам Архимед применял спираль для решения задачи квадратуры круга). Эта кривая получается следующим образом. Пусть луч OA равномерно вращается вокруг точки O, а точка L равномерно движется по этому лучу, причем в начальном положении она находится в точке O (рис. 31). Тогда точка L движется по спирали Архимеда. Пусть угол AOB нужно разделить в заданном отношении. Рассмотрим часть спирали Архимеда, полученную при вращении луча от начального положения OA до положения OB. Пусть P — точка, которая делит в данном отношении отрезок OL, где L — точка пересечения луча OB и спирали, Q — точка пересечения спирали и окружности радиуса OP с центром O. Из определения спирали следует, что $\angle LOQ : \angle QOA = LP : QO = LP : PO$, т. е. OQ — искомый луч.

Более подробно о свойствах квадратрисы и спирали мы расскажем в главе, посвященной квадратуре круга.

§ 3. Более поздние решения

Трисекция угла и кубические уравнения

В связи с постепенным формированием алгебры арабские математики проявляли все больший интерес к уравнениям, особенно к кубическим уравнениям. В XI в. ими было получено уравнение трисекции угла (т. е. соотношение между $\sin 3\alpha$ и $\sin\alpha$) и тем самым было показано, что задача трисекции угла сводится к решению кубического уравнения.

Если воспользоваться формулой $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, то получить уравнение трисекции угла очень легко: $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos\alpha = \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha = 3\sin\alpha \times (1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. Пусть $a = \sin 3\alpha$

и $x=\sin\alpha$. Тогда $3x-4x^3=a$, т. е. построение отрезка x по данному отрезку a сводится к построению корня кубического уравнения.

Тригонометрические функции были введены сравнительно поздно, поэтому мы остановимся на двух геометрических способах вывода уравнения трисекции угла, не использующих формулу для синуса суммы двух углов. Первый из этих способов принадлежит арабским математикам, а второй Декарту.

Рассмотрим окружность с диаметром AO и точки B и C, делящие дугу AD на три равные части (рис. 32). Пусть точки B_1, C_1 и D_1 таковы, что точки B, C и D являются серединами отрезков AB_1, AC_1 и AD_1. Нам нужно получить соотношение между известным отрезком AD и неизвестным отрезком AB. Применив теорему Птолемея (см. [Прасолов, 1991, задача 6.34]) к вписанному четырехугольнику $ABCD$, получим $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$. А так как $AB=BC=AD$, то $AB^2+AB\cdot AD=AC^2$. Точка C лежит на отрезке OB_1, потому что $\angle AOC=\smile AC/2=\smile AB_1=\angle AOB_1$. Диаметр B_1B_2 и хорда AC_1 пересекаются в точке C, поэтому $AC\cdot CC_1=B_1C\cdot CB_2$, т. е. $AC^2=B_1C(2d-B_1C)$, где $d=AO$. Кроме того, $\triangle AOB\sim\triangle B_1AC$ и $AB:AO=$ $=B_1C:B_1A=B_1C:2AB$, т. е. $B_1C=2AB^2/d$. В итоге получаем

$$AB^2+AB\cdot AD=AC^2=B_1C(2d-B_1C)=$$

$$=\frac{2AB^2}{d}\left(2d-\frac{2AB^2}{d}\right),$$

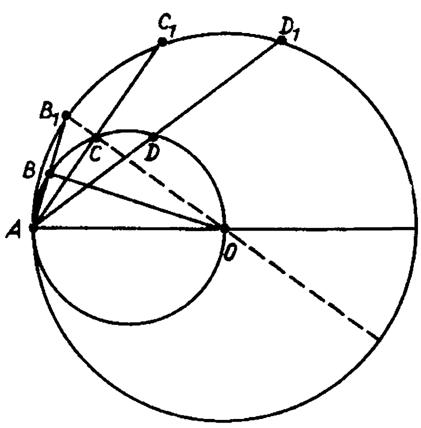

Рис. 32.

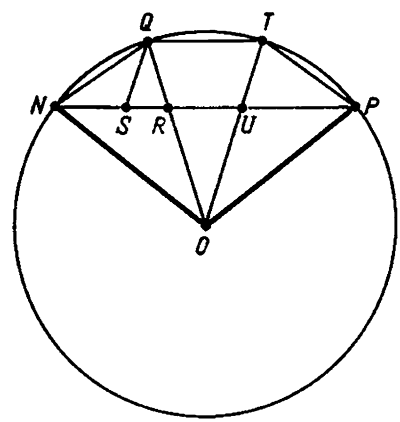

Рис. 33.

т. е. $d^2 AD = 3d^2 AB - 4AB^3$. Если радиус окружности, на которой лежат точки A, B, C и D, равен 1, то $d=2$ и $AD = 3AB - AB^3$.

Рассуждения Декарта более просты и изящны. Пусть точки Q и T делят дугу NP окружности с центром O на три равные части, радиусы OQ и OT пересекают хорду NP в точках R и U, а прямая, проходящая через точку Q параллельно прямой TO, пересекает эту хорду в точке S (рис. 33). Так как $\angle QNR = (\smile QT + \smile TP)/2 = \smile NQ = \angle NOQ$, то треугольники NOQ, QNR и RQS являются подобными равнобедренными треугольниками. Поэтому $NO : NQ = NQ : QR = QR : RS$. Если $NO = 1$ и $NQ = z$, то $QR = z^2$ и $RS = z^3$. Ясно также, что $NP + SR = NR + (SR + RU) + UP = NQ + QT + TP = 3NQ$, т. е. $NP = 3z - z^3$.

Решение Декарта (1598—1650)

Как мы уже говорили, для построения корней уравнения $x^3 = px + q$ Декарт рассматривал точки пересечения параболы $y = x^2$ и окружности с центром в точке $(q/2,\ (p+1)/2)$, проходящей через начало координат; корни уравнения являются отличными от нуля проекциями на ось Ox этих точек пересечения (см. с. 31). Кроме того, если точки Q и T делят на три равные части дугу NP окружности радиуса 1 и $NP = a$, $NQ = x$, то $x^3 = 3x - a$. Поэтому для

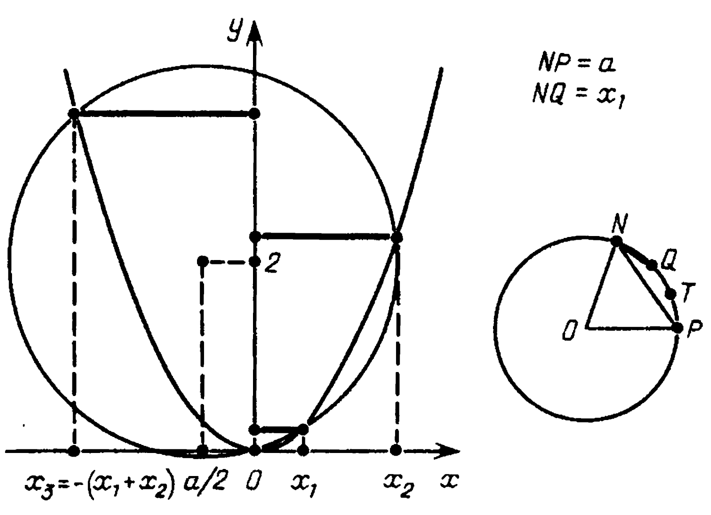

Рис. 34.

трисекции угла Декарт предложил следующее построение. Пусть нужно разделить дугу NP единичной окружности на три равные части. Рассмотрим точки пересечения параболы $y=x^2$ и окружности с центром $(-a/2, 2)$, проходящей через начало координат (рис. 34). Если $a=NP=2\sin 3\alpha$ и $0\leqslant 3\alpha\leqslant\pi/2$, то корнями уравнения $x^3=3x-a$ являются числа $x_1=2\sin\alpha$, $x_2=$ $=2\sin(\alpha+2\pi/3)=-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$ и $x_3=2\sin(\alpha+4\pi/3)=$ $=-\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=-(x_1+x_2)$. Положительные корни x_1 и x_2 Декарт называет «истинными» (число $x_2=2\sin(\alpha+2\pi/3)$ положительно, так как $\alpha+2\pi/3\leqslant$ $\leqslant\pi/6+2\pi/3<\pi$), а корень $x_3=-(x_1+x_2)$ он называет «ложным». В качестве искомого отрезка NQ нужно взять меньший из положительных корней (второй положительный корень позволяет разделить на три равные части дугу, дополняющую исходную дугу до полной окружности).

Трисекция угла с помощью улитки Паскаля (XVII в.)

Возьмем на окружности радиуса R точку A и проведем через нее прямую l. Прямая l пересекает окружность в точках X и A (если l — касательная, то $X=A$). Пусть M_1 и M_2 — такие точки прямой l, что $XM_1=XM_2=a$, где a — фиксированное число. Множество всех точек M_1 и M_2 (для всех прямых l) называют *улиткой Паскаля* (такие кривые изучал Этьен Паскаль, отец знаменитого математика и философа Блеза Паскаля). Нас будет интересовать случай, когда $a=R$ (рис. 35). Пусть векторы $\overrightarrow{XM_1}$ и $\overrightarrow{AX}$ сонаправлены, B — точка на продолжении отрезка M_1O за точку O. Так как треугольники M_1XO и XOA равнобедренные, то $\angle OAX=2\angle OM_1A$ и $\angle AOB=\angle OM_1A+\angle OAX=$ $=3\angle OM_1A$. Поэтому для трисекции угла φ, где $0<\varphi<\pi/2$, можно поступить следующим образом. Возьмем точку B так, что $\angle AOB=\varphi$. Пусть прямая OB пересекает сплошную часть улитки Паскаля в точке M_1

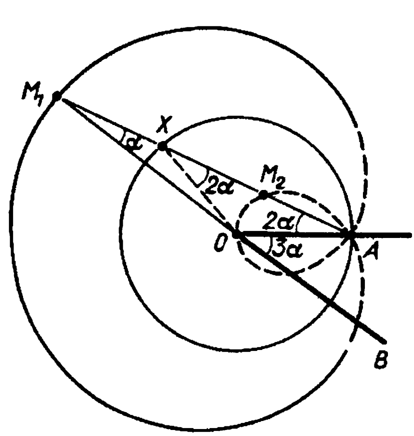

Рис. 35.

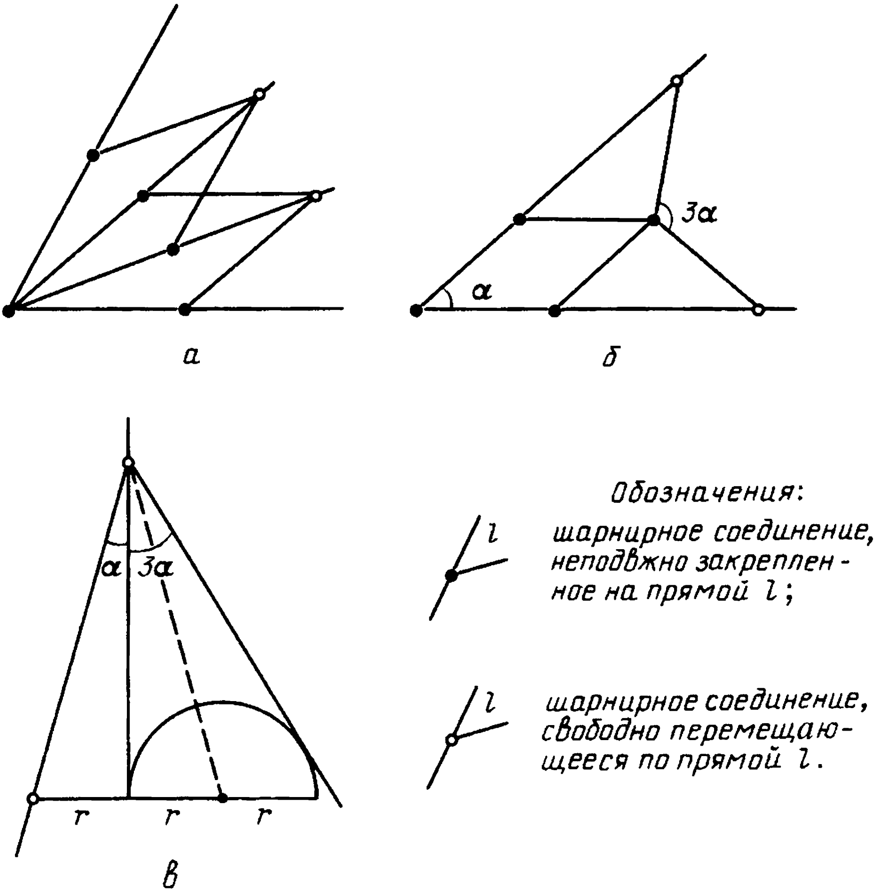

Рис. 36.

(пунктирная часть улитки Паскаля соответствует таким точкам M_2, что векторы $\overrightarrow{XM_2}$ и $\overrightarrow{AX}$ противоположно направлены). Тогда $\angle OM_1A = \varphi/3$.

Инструменты для трисекции угла

Для деления угла на три равные части было изобретено много разных инструментов. Три таких инструмента изображены на рис. 36 а) — в). Эти рисунки не требуют пояснений. Отметим лишь, что инструмент а) изобрел Декарт, а инструмент б) — известный итальянский геометр Джованни Чева.

§ 4. Свойства трисектрис

Возьмем на стороне BC треугольника ABC такие точки D и E, что $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC = \angle A/3$. Отрезки AD и AE называют *трисектрисами* угла

A треугольника ABC. Самым замечательным свойством трисектрис является теорема Морли. Она заключается в следующем. Пусть ближайшие к стороне BC трисектрисы углов B и C пересекаются в точке A_1; точки B_1 и C_1 определяются аналогично (рис. 37). Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний. Мы не будем доказывать эту достаточно сложную теорему. Желающие могут найти ее доказательство в книге [Прасолов, 1991, задача 5.56], а доказательство общей теоремы, учитывающей трисектрисы не только внутренних, но и внешних углов, приведено в книге [Шарыгин, 1986, задача II.321].

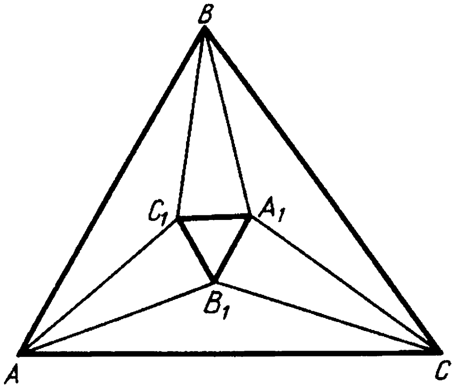

Рис. 37.

Трисектрисы обладают некоторыми интересными свойствами, доказательство которых не сложно. Мы приведем их в качестве задач (решения этих задач можно найти в конце брошюры).

Задачи

1. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что $\angle ACD = \angle C/3$. Докажите, что

$$CD = \frac{AC \cdot BC \sin C}{AC \sin(C/3) + BC \sin(2C/3)}.$$

2. Расстояние между центрами O и O_1 окружностей радиуса R равно R. Пусть A и B — такие точки окружностей, что $AB \parallel OO_1$, C — общая точка окружностей (рис. 38). Докажите, что OC — трисектриса угла AOB.

3. Точка F лежит на дуге AC окружности с центром D, радиус DF пересекает хорду AC в точке E. Докажите, что $\smile FC = \smile AC/3$ тогда и только тогда, когда $CE = CF$ (Киннер, 1653 г.).

4. Точка F лежит на дуге AC окружности с центром D. Касательная к окружности в точке F пересекает прямую AC и перпендикуляр, восставленный из точки A к прямой AC, в точках M и N соответственно. Докажите, что $\smile FC = \smile AC/3$ тогда и только тогда, когда $FM = FN$ (Киннер).

5. Точка F лежит на дуге AC окружности, причем проекция H точки F на прямую AC лежит на отрезке AC. Докажите, что $\smile FC = \smile AC/3$ тогда и только тогда, когда $AH = HC + FC$ (Киннер).

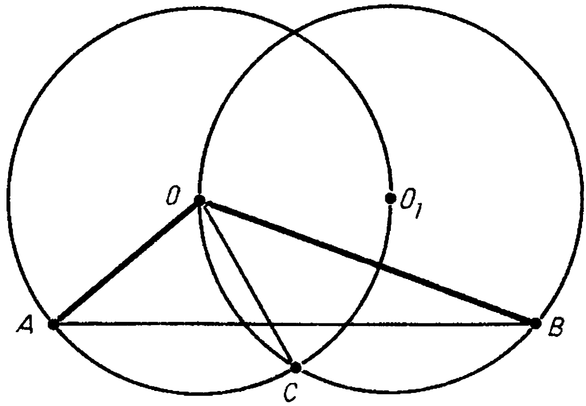

Рис. 38.

6. Точка F лежит на дуге AC окружности с центром D. Проведем диаметр AP. Пусть биссектриса угла CDP пересекает окружность в точке X. Прямая PF пересекает диаметр XY в точке Q. Докажите, что $\smile FC = \smile AC/3$ тогда и только тогда, когда длина отрезка FQ равна радиусу окружности (Я. Бернулли).

Глава 3

КВАДРАТУРА КРУГА

§ 1. Исторический очерк

Задача *квадратуры круга*, т. е. построения квадрата, равновеликого данному кругу, в Древней Греции была, по-видимому, очень популярна. Плутарх сообщает, что философ Анаксагор (ок. 500—428 гг. до н. э.) в тюрьме занимался этой задачей. О ней говорится и в комедии Аристофана «Птицы» (414 г. до н. э.): «Приложив сюда линейку, круг описываю циркулем, и верх и низ ... Потом линейкой отношу прямую. Круг теперь подобен четырехугольнику.» Это упоминание в комедии означает, что задача квадратуры круга была общеизвестна.

Странным образом задача квадратуры круга и обратная ей задача «кругатуры квадрата», т. е. построения круга, равновеликого данному квадрату, была известна также и в Древней Индии. Индийские алтари были самой разной формы: в виде квадрата, круга, полукруга, равностороннего треугольника, равнобедренной трапеции, сокола, черепахи и т. д. Но все эти алтари должны были иметь одну и ту же площадь. В связи с этим возникали задачи превращения круга в равновеликий ему квадрат и квадрата в равновеликий ему круг. Решения этих задач приведены в древнеиндийской книге «Сульвасутра», посвященной построению алтарей. Разные части этой книги датируются VII—II вв. до н. э. Решения интересующих нас задач содержатся в наиболее древней части «Сульвасутры».

Построение круга, равновеликого квадрату, в «Сульвасутре» производилось следующим образом. Опишем вокруг квадрата $ABCD$ окружность. Пусть перпендикуляр к отрезку AB, проходящий через центр O квадрата, пересекает прямую AB и окружность в точках

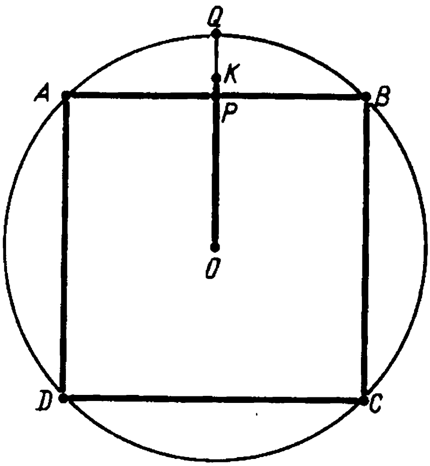

Рис. 39.

P и Q соответственно; точка K делит отрезок PQ в отношении $PK:KQ=1:2$ (рис. 39). Тогда OK — радиус круга, площадь которого равна площади квадрата. Это решение, конечно же, приближенное. Если a — сторона квадрата, r — радиус построенного круга, то $r=a(2+\sqrt{2})/6$. Поэтому из соотношения $a^2=\pi r^2$ для числа π получаем приближенное значение $2\left(\frac{3}{1+\sqrt{2}}\right)^2 \approx$ $\approx 3{,}088$.

Для решения обратной задачи, т. е. для превращения круга в равновеликий ему квадрат, в Древней Индии не смогли найти столь же простого геометрического построения и решали ее алгебраически. Это решение выглядит следующим образом: если d — диаметр круга, a — сторона равновеликого ему квадрата, то

$$a=d\left(1-\frac{28}{8\cdot 29}-\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right).$$

Для числа π это решение дает приближенное значение 3,088.

Эти очень близкие друг к другу приближенные значения числа π показывают, по-видимому, что первое (геометрическое) решение в Древней Индии считалось точным. Второе (алгебраическое) решение явно является обращением именно этого геометрического построения, причем для этого использовалось содержащееся в книге «Сульвасутра» приближенное значение

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}\approx 1{,}4142157,$$

которое отличается от точного значения лишь в шестом знаке после запятой.

В самом деле, подставив в формулу $\frac{d}{a}=\frac{2+\sqrt{2}}{3}$ значение $\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$, получим $\frac{d}{a}=\frac{1393}{1224}$, т. е. $\frac{a}{d}=\frac{1224}{1393}$.

Легко проверить, что

$$\frac{1224}{1393}=1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 29}-\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8\cdot 1393}.$$

Отбросив последнее слагаемое, получим формулу, содержащуюся в книге «Сульвасутра». Это разложение получается почти естественным образом: $\frac{1224}{1393}=1-\frac{169}{1393}$; $\frac{169}{1393}=\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{8}-\frac{169}{1393}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{41}{1393}$; $\frac{41}{1393}=\frac{1}{29}-\left(\frac{1}{29}-\frac{41}{1393}\right)=$ $=\frac{1}{29}-\frac{1}{29}\cdot\frac{204}{1393}$; $\frac{204}{1393}=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}-\frac{204}{1393}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{169}{1393}$; $\frac{169}{1393}=\frac{1}{8}-$ $-\left(\frac{1}{8}-\frac{169}{1393}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{41}{1393}$. Единственный неестественный шаг в этом разложении заключается в том, что $\frac{1}{34}<$ $<\frac{41}{1393}<\frac{1}{33}$, а в качестве приближения числа $\frac{41}{1393}$ берут $\frac{1}{29}$.

* * *

В Древней Греции задача квадратуры круга возникла после того, как была решена задача превращения многоугольника в равновеликий ему прямоугольник. Эта задача решалась следующим образом. Сначала многоугольник разрезали на треугольники. Затем треугольник со стороной a и высотой h_a заменяли на равновеликий ему прямоугольник со сторонами $a/2$ и h_a. После этого выбирали некоторый отрезок e и заменяли каждый прямоугольник на равновеликий ему прямоугольник, одна сторона которого равна e. Как это делалось, показано на рис. 40; заштрихованные прямоугольники равновелики, потому что они получены из двух равных треугольников путем отрезания от них двух пар равных треугольников. Затем полученные прямоугольники со стороной e прикладывали друг к другу этой стороной и складывали тем самым некоторый прямоугольник. Оставалось построить для

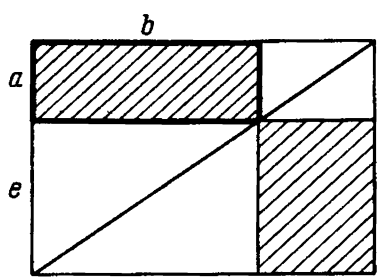

Рис. 40.

прямоугольника равновеликий ему квадрат. Эта задача интересна тем, что в книге «Сульвасутра» и в «Началах» Евклида приведены очень похожие решения этой задачи, причем решения далеко не самые простые.

В книге «Сульвасутра» квадрат, равновеликий данному прямоугольнику $ABCD$, строился следующим образом. Пусть для определенности $AB<BC$. Отрежем от прямоугольника $ABCD$ квадрат со стороной AB и разрежем оставшийся прямоугольник на два равных прямоугольника; один из этих прямоугольников приложим к квадрату. В результате получим фигуру, заштрихованную на рис. 41. Эта фигура является квадратом со стороной a, из которого вырезан квадрат со стороной b. Ее площадь равна площади квадрата со стороной x, где $x^2=a^2-b^2$. Для построения отрезка x можно воспользоваться теоремой Пифагора: этот отрезок является катетом прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b. В книге «Сульвасутра» теорема Пифагора приведена в следующей формулировке: «Диагональ прямоугольника образует оба квадрата, которые вертикальная и горизонтальная стороны образуют по отдельности». Это, по-видимому, первая по времени формулировка теоремы Пифагора (сам Пифагор родился, скорее всего, уже после того как была написана «Сульвасутра»; к тому же сохранившиеся древнегреческие формулировки и доказательства его теоремы относятся к гораздо более поздней эпохе).

Построение, описанное в книге «Сульвасутра», далеко не самое простое. Более простое решение видно из рис. 42: если хорда CD, перпендикулярная диаметру AB, пересекает его в точке O, то $CO^2=CO\cdot OD=$

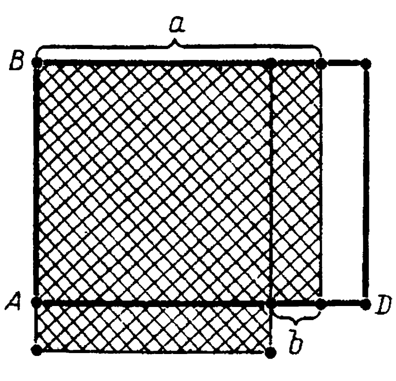

Рис. 41.

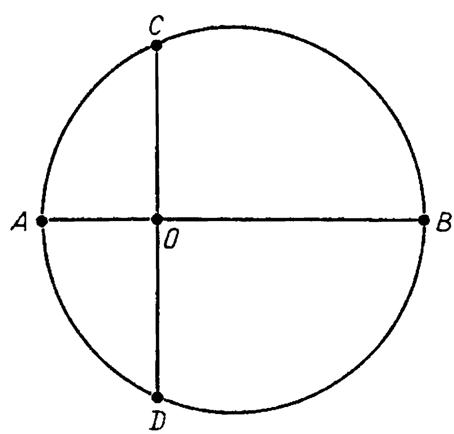

Рис. 42.

$= AO \cdot OB$, т. е. CO — сторона квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами AO и OB. Евклид приводит именно такое построение, но доказательство у него точно такое же, как в книге «Сульвасутра»; оно тоже основано на теореме Пифагора. Возьмем на продолжении стороны BC за точку B такую точку E, что $BE = AB$. Пусть O — середина отрезка EC,

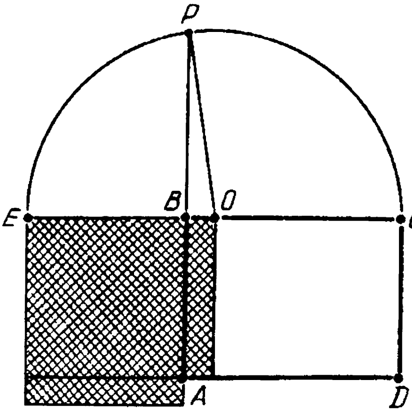

Рис. 43.

P — точка пересечения луча AB и окружности с диаметром EC (рис. 43). Евклид доказывает, что площадь квадрата со стороной BP равна площади прямоугольника $ABCD$, следующим образом. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна площади заштрихованной фигуры. Следовательно, она равна разности площадей квадратов со сторонами $EO = OP$ и BO. По теореме Пифагора площадь квадрата, построенного на катете BP прямоугольного треугольника OBP, равна разности площадей квадратов, построенных на гипотенузе OP и катете BO.

Такое странное доказательство Евклида трудно объяснить. Теорема о том, что $CO \cdot OD = AO \cdot OB$ (см. рис. 42), ему известна, причем доказывает ее он, опираясь тоже фактически лишь на теорему Пифагора (не используя весьма сложной теории отношений). Во всяком случае, совпадение древнегреческого и древнеиндийского доказательств вряд ли случайно.

* * *

Наиболее ранние дошедшие до нас древнегреческие решения задачи квадратуры круга на первый взгляд кажутся просто глупостью. Афинянин Антифонт вписывал в круг многоугольник (треугольник или квадрат), затем делил дуги пополам и строил вписанный многоугольник с удвоенным числом сторон и т. д. Он думал, что в конце концов получится многоугольник, который, благодаря крайней малости своих сторон, совпадет с окружностью. Бризон взял квадрат, вписанный в круг, и квадрат, описанный около круга, а затем взял квадрат, лежащий между ними. Он утверждал, что площадь последнего квадрата равна площади круга.

Позднейшие древнегреческие комментаторы к решениям Антифонта и Бризона относились пренебрежительно и их вообще не обсуждали. Но деятельность Антифонта и Бризона не следует недооценивать. Для решения задачи квадратуры круга необходимо было понять, что же такое площадь круга, а для этого было нужно представление о пределе. В Древней Индии обошли эти трудности, приняв на веру неточное решение этой задачи. Антифонт и Бризон наощупь искали понятие предела. В их рассуждениях неверного много, но есть и кое-что очень важное; созданный впоследствии метод исчерпывания многое у них перенял. Архимед при вычислении числа π как отношения длины окружности к диаметру использовал как идею Антифонта (переход от вписанного n-угольника к вписанному $2n$-угольнику), так и идею Бризона (применение не только вписанных, но и описанных многоугольников).

§ 2. Древнегреческие решения

Квадратриса Динострата (IV в. до н. э.)

Как мы уже говорили, кривую, которую Гиппий предложил использовать для деления угла в данном отношении, впоследствии использовали для решения задачи квадратуры круга. Это решение сохранилось лишь в передаче Паппа, который жил на пять веков позже Динострата. Мы сначала перескажем текст Паппа, а затем прокомментируем его, следуя работе [Зайденберг, 1972], потому что с точки зрения истории математики в этом решении слишком много загадочного.

Напомним, как получается квадратриса Динострата. Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 44). Пусть концы отрезка BC равномерно движутся по прямым BA и CD, а отрезок AB равномерно вращается вокруг точки A, причем в положение AD оба отрезка приходят одновременно. Пусть, далее, в некоторый момент отрезок BC занимает положение $B'C'$, а отрезок AB занимает положение AN; L — точка пересечения отрезков $B'C'$ и AN. Квадратриса Динострата есть множество всех точек L. Если квадратриса пересекает отрезок AD в точке K, то длина дуги BD равна AB^2/AK. Поэтому площадь окружности радиуса AB равна площади прямоугольника со сторонами $4AB^2/AK$ и $AB/2$;

эти отрезки легко строятся с помощью циркуля и линейки, если известны отрезки AB и AK. Построив прямоугольник, можно построить равновеликий ему квадрат.

Папп пишет, что против этого решения Спор выдвинул два серьезных возражения, с которыми сам он полностью согласен.

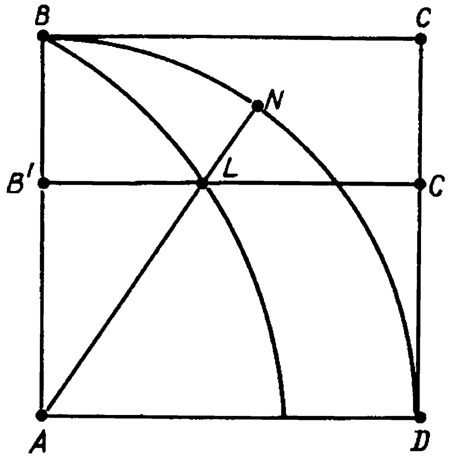

Рис. 44.

1) Чтобы согласовать движение отрезков BC и AB, нужно заранее знать отношение длины дуги четверти окружности к радиусу. Поэтому решить задачу квадратуры круга с помощью квадратрисы Динострата можно, только если ее решение уже известно.

2) Точку K построить нельзя, потому что в соответствующий момент времени отрезок и радиус совпадают. Как пересечения отрезков $B'C'$ и AN можно строить лишь точки, близкие к точке K, но не саму точку K. Говоря современным языком, точку K можно построить лишь как предел точек квадратрисы.

Докажем теперь, что длина дуги BD действительно равна AB^2/AK, т. е. $\overset{\frown}{BD}:AB=AB:AK$, где $\overset{\frown}{BD}$ — длина дуги BD (в этом параграфе мы будем использовать такое нестандартное обозначение). Доказательство проведем методом от противного. Ясно, что $\overset{\frown}{BD}:AB=$ $=AB:AK_1$, где AK_1 — некоторый отрезок, и поэтому достаточно доказать, что длина отрезка AK_1 не может быть ни больше, ни меньше длины отрезка AK.

Предположим сначала, что $AK_1>AK$. Тогда окружность радиуса AK_1 с центром A пересекает квадратрису в некоторой точке L, а сторону AB — в точке Z (рис. 45). Так как $\overset{\frown}{BD}:AB=AB:AK_1=\overset{\frown}{BD}:\overset{\frown}{ZK_1}$, то $AB=\overset{\frown}{ZK_1}$. По определению квадратрисы $\overset{\frown}{BD}:\overset{\frown}{ND}=$ $=BA:LH$. Но $\overset{\frown}{BD}:\overset{\frown}{ND}=\overset{\frown}{ZK_1}:\overset{\frown}{LK_1}$ и $BA:LH=\overset{\frown}{ZK_1}:LH$, поэтому $\overset{\frown}{LK_1}=LH$, что, как пишет Папп, «нелепо».

Предположим теперь, что $AK_1<AK$. Тогда касательная в точке K_1 к окружности радиуса AK_1 с центром

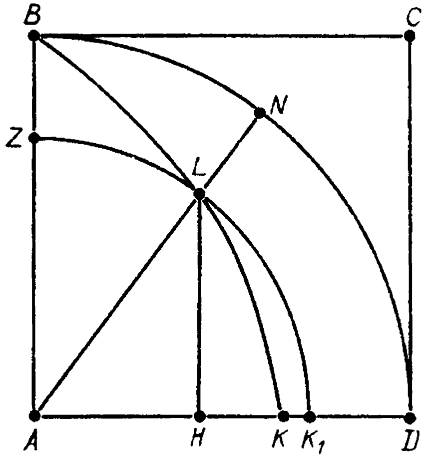

Рис. 45.

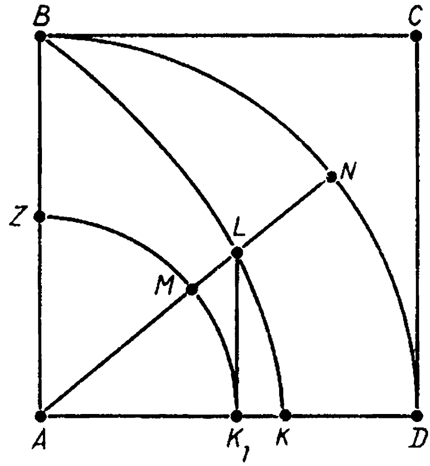

Рис. 46.

A пересекает квадратрису в некоторой точке L. Прямая AL пересекает окружности с радиусами AK_1 и AD в точках M и N соответственно (рис. 46). Так как $\overset{\frown}{BD}:AB=AB:AK_1=\overset{\frown}{BD}:\overset{\frown}{ZK_1}$, то $AB=\overset{\frown}{ZK_1}$. По определению квадратрисы $\overset{\frown}{BD}:\overset{\frown}{ND}=BA:LK_1$. Но $\overset{\frown}{BD}:\overset{\frown}{ND}=\overset{\frown}{ZK_1}:\overset{\frown}{MK_1}$ и $BA:LK_1=\overset{\frown}{ZK_1}:LK_1$, поэтому $\overset{\frown}{MK_1}=LK_1$, что, как снова пишет Папп, «нелепо».

В этом решении много загадочного. Прежде всего, непонятно, какую именно задачу решал Динострат: задачу квадратуры круга, т. е. построения квадрата, равновеликого данному кругу, или же задачу спрямления окружности, т. е. построения отрезка, длина которого равна длине данной окружности. Со времен Архимеда эти задачи были эквивалентны: он доказал, что если радиус окружности равен R, а длина окружности равна L, то площадь круга равна площади прямоугольника со сторонами R и $L/2$. Но ведь Динострат жил задолго до Архимеда, а то доказательство, которое приводит Папп, дает именно спрямление окружности, а не квадратуру круга! Как же это понимать? Возможно, у Динострата было доказательство, дающее именно квадратуру круга, а Папп просто привел другое доказательство, но это совершенно невероятно. Скорее всего, теорема, доказанная Архимедом, была известна (без доказательства) еще во времена Динострата. К сожалению, книга Архимеда «Измерение круга» дошла до нас в сильно искаженном виде. Возможно, что у нее было предисловие, в котором Архимед излагал предысторию своей теоремы, но это предисловие не сохранилось; книга начинается сразу формулировкой теоремы: «Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, причем радиус круга равен одной из прилегающих к прямому углу сторон, а периметр — основанию треугольника».

В приведенном доказательстве свойства квадратрисы Папп использует теорему о том, что отношение длин окружностей равно отношению их радиусов. Это весьма странно. В «Началах» Евклида, который жил после Динострата, есть теорема о том, что площади кругов относятся как квадраты радиусов, а вот нужной нам теоремы нет, причем это не случайно. Для сравнения площадей фигур есть вполне естественный способ: если одна фигура лежит внутри другой, то площадь внутренней фигуры меньше площади внешней. А как сравнивать длины кривых? Евклид не смог предложить никакого разумного способа, строгость которого его бы устраивала. Возможный подход к сравнению длин кривых у Евклида слегка намечен. В его «Началах» есть теорема о том, что одна сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Прокл писал, что эпикурейские математики считали смешным доказывать такое положение, так как его прекрасно знает осел, идущий к сену по прямой линии. Архимед поступил еще решительнее эпикурейцев. Он счел необходимым принять без доказательства, что если две выпуклые кривые имеют общие концы и одна из них лежит внутри другой (рис. 47), то длина внутренней кривой меньше длины внешней. Более того, аналогичное утверждение он принял без доказательства не только для кривых, но и для поверхностей, и лишь эта смелость позволила ему доказать знаменитую теорему о том, что отношение площадей поверхностей шара и описанного около него цилиндра равно 2/3. (Архимед очень гордился этой теоремой и теоремой об объеме шара и завещал высечь на его надгробии цилиндр, описанный вокруг шара; по этому знаку Цицерон нашел могилу Архимеда «среди терниев и чертополоха».) Принимать без доказательства Архимед мог, казалось бы, лишь те утверждения, которые были

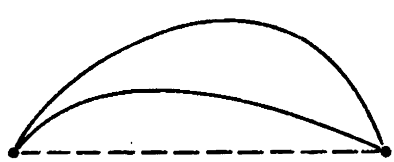

Рис. 47.

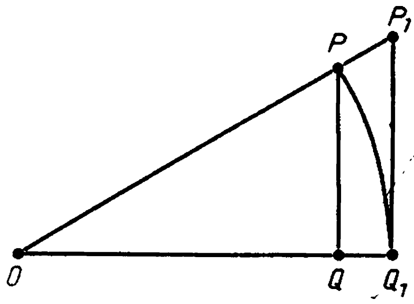

Рис. 48.

очевидны для тел и фигур, с которыми он умел обращаться. Но вовсе не очевидно, например, что если один тетраэдр лежит внутри другого, то площадь поверхности внутреннего тетраэдра меньше площади поверхности внешнего.

В тексте Паппа есть еще два загадочных места, а именно неравенства, которые он считает очевидными и молчаливо обходит. При разборе случая $AK<AK_1$ Папп считает очевидным, что $LH<\overset{\frown}{LK_1}$ (см. рис. 45), а при разборе случая $AK>AK_1$ он считает очевидным, что $\overset{\frown}{MK}<LK_1$ (см. рис. 46). Для удобства изобразим все нужные отрезки и дуги на одном рисунке. Неравенства $PQ<\overset{\frown}{PQ_1}<P_1Q_1$ (рис. 48) для окружности радиуса 1 можно записать в виде $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$. Первое неравенство еще можно счесть очевидным: $PQ<PQ_1<\overset{\frown}{PQ_1}$. Но как быть со вторым неравенством? Обычно его доказывают следующим образом: если радиус окружности равен 1 и S — площадь сектора POQ_1, то неравенство $2S<2S_{OP_1Q_1}$ можно переписать в виде $\alpha<\operatorname{tg}\alpha$ (а неравенство $2S_{OPQ}<2S$ можно переписать в виде $\sin\alpha<\alpha$). Но при этом нельзя обойтись без соотношения $S=R\cdot L/2$, где S — площадь сектора, R — радиус окружности, L — длина дуги сектора, а до Архимеда доказательства этого соотношения не было. По-видимому, формула для вычисления площади сектора Диностратy была известна, но без доказательства. Эту формулу древнегреческие математки могли перенять от египетских или вавилонских математиков (по крайней мере, площадь полукруга в Вавилоне вычисляли именно по такой формуле).

* * *

Приведенное выше описание квадратрисы не устраивало древнегреческих математиков по многим причинам. Они вообще не любили вводить движение в математику, а в данном случае речь шла сразу о движении двух отрезков, причем эти движения нужно было согласовывать. Поэтому были предложены два описания квадратрисы с помощью пересечения поверхностей (они сохранились в сочинениях Паппа). Задание кривой как пересечения поверхностей считалось наиболее законным. Греческие математики безоговорочно верили в то, что пересечение поверхностей дает «хорошую» кривую, а также в то, что кривые обязательно пересекаются в тех случаях, когда это, так сказать, «видно». Архит Тарентский без каких-либо сомнений рассматривал пересечение цилиндра, конуса и тора (точнее говоря, он рассматривал сначала кривую, которую вычерчивает на цилиндре вращающийся полукруг, а затем брал точку пересечения этой кривой и конуса). Евклид не счел нужным в свою систему аксиом вводить аксиомы, связанные с пересечением окружностей, а уже в самом первом предложении «Начал» для построения равностороннего треугольника он использовал то, что окружность радиуса AB с центром A пересекается с окружностью радиуса BA с центром B.

Первый способ задания квадратрисы использует винтовую линию. Винтовая линия получается при движении точки по поверхности цилиндра, слагающемся из двух движений: движения с постоянной скоростью, направленной параллельно оси цилиндра, и вращения по окружности основания цилиндра с постоянной угловой скоростью (рис. 49). Рассмотрим четверть круга и лежащую над ней часть винтовой линии (на рис. 50 она изображена пунктиром). Опустим из точки L, лежащей на радиусе AN, перпендикуляр LH на радиус

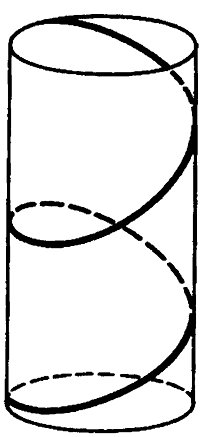

Рис. 49.

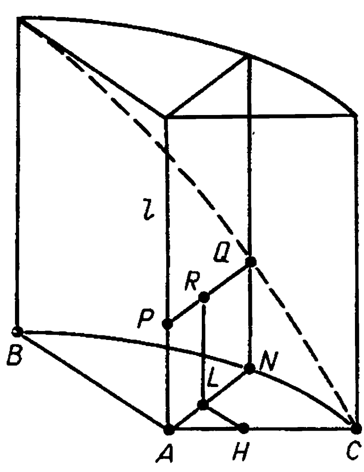

Рис. 50.

AC. Пусть $LH:\overset{\frown}{NC}=p$; если $p=AB:\overset{\frown}{BC}$, то точка L лежит на квадратрисе. Если Q — точка винтовой линии, проецирующаяся в точку N, то по свойству винтовой линии $ON:\overset{\frown}{NC}=q$ — постоянная величина Пусть P — такая точка перпендикуляра l к плоскости ABC, восставленного из точки A, что $PQ \| AN$; R — точка отрезка PQ, проецирующаяся в точку L. Тогда $LH:RL=(LH:\overset{\frown}{NC}):(RL:\overset{\frown}{NC})=p:q$, т. е. точка R лежит в плоскости П, проходящей через прямую AC и образующей с плоскостью ABC угол α, где $\operatorname{tg}\alpha=p/q$. Кривая, образованная точками R, является пересечением плоскости П и поверхности, образованной отрезками PQ (точка P движется по прямой l, а точка Q движется по винтовой линии), а квадратриса является ортогональной проекцией этой кривой на плоскость ABC.

Второй способ задания квадратрисы как пересечения поверхностей использует спираль Архимеда, т. е. кривую, которую заметает точка M, равномерно движущаяся по радиусу AN, который в свою очередь равномерно вращается вокруг точки A. Рассмотрим часть спирали, полученную при повороте радиуса AN на 90° от положения AC до положения AB (рис. 51). Опустим из точки L, лежащей на квадратрисе, перпендикуляр LH на отрезок AC. По свойству квадратрисы $LH:\overset{\frown}{NC}=AB:\overset{\frown}{BC}$, а по свойству спирали Архимеда $AB:\overset{\frown}{BC}=AM:\overset{\frown}{NC}$, поэтому $LH=AM$. Восставим из точек A, M и L перпендикуляры AP, MQ и LR к плоскости ABC длиной $LH=AM$. Точка Q лежит как на цилиндре над спиралью, так и на конусе, осью которого является луч AP, а угол между осью и образующей равен 45°. Кривая, образованная точками Q, является пересечением этих двух поверхностей. Рассмотрим теперь поверхность, образованную лучами PQ. Так как $RL=LH$, то точка R лежит на

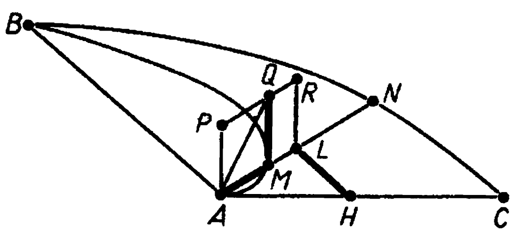

Рис. 51.

пересечении этой поверхности и плоскости, проходящей через прямую AC и образующей с плоскостью ABC угол 45°. Квадратриса является ортогональной проекцией кривой, образованной точками R, на плоскость ABC.

* * *

Квадратриса Динострата занимает видное положение в книге Декарта «Геометрия». Одной из главных его целей было разделение кривых на «геометрические» и «механические». У Декарта нет единого определения «геометрических» кривых; к этому понятию он подходит разными путями и не только не доказывает эквивалентности получающихся при этом определений, но даже и не дает сколько-нибудь строгих определений. С современной точки зрения самым главным свойством этих кривых является то, что они задаются алгебраическими соотношениями. У Декарта такой подход намечен, но лишь как нечто второстепенное. Самый главный его подход к этим кривым — они должны задаваться некоторой комбинацией движений. Причины, по которым Декарт исключает из числа этих кривых квадратрису, не совсем ясны. Он пишет, что для квадратрисы между двумя движениями отрезков нет соотношения, которое можно измерить точно.

В отношении квадратрисы более интересен другой его подход к «геометрическим» кривым. Получив для кривой алгебраическое уравнение $f(x,y)=0$, можно строить корни алгебраического уравнения $f(x,\eta)=0$ для любого η и тем самым получать сколько угодно точек кривой. Для квадратрисы тоже можно получать сколько угодно точек, построив сначала биссектрису прямого угла, затем построив бассектрисы полученных углов и т. д. (рис. 52). Но так мы можем получить лишь такие точки (x, y) квадратрисы, что $y=k\ OA/2^n$, k и n — натуральные числа.

Эти рассуждения Декарта показывают, что он видел связь между:

1) возможностью построить любую точку кривой как корень алгебраического уравнения;

2) заданием кривой с помощью движений;

3) заданием кривой алгебраическим соотношением.

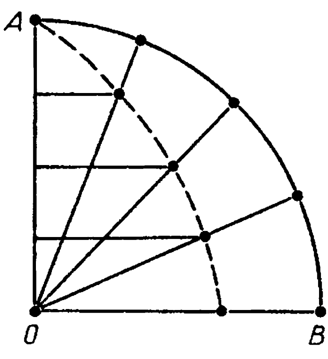

Рис. 52.

Гораздо позднее действительно было доказано, что алгебраические кривые — это как раз те кривые, которые можно получить с помощью шарнирных механизмов.

Спираль Архимеда (ок. 287—212 г. до н. э.)

Для решения задачи квадратуры круга Архимед применил касательную к спирали. Напомним, как получается спираль Архимеда. Пусть луч равномерно вращается вокруг точки O, а по этому лучу равномерно движется точка X; тогда точка X движется по спирали Архимеда (две спирали, полученные при движении точки X по лучам со скоростями v_1 и v_2, гомотетичны с центром O и коэффициентом v_1/v_2). Рассмотрим один виток спирали, т. е. часть спирали, которую проходит точка X при повороте луча на 360°. Пусть l — начальное положение луча (оно же совпадает с конечным положением); A — точка X в конечном положении; B — точка пересечения касательной к спирали в точке A и перпендикуляра к лучу l, восставленного из точки O. Теорема, доказанная Архимедом, заключается в том, что длина отрезка OB равна длине окружности с радиусом OA (рис. 53).

Доказать это утверждение можно следующим образом. Пусть P — точка окружности S радиуса OA с центром O, близкая к точке A; Q — точка пересечения луча OP и спирали. По свойству спирали $\overset{\frown}{AP}:PQ=L:R$, где L — длина окружности S, R — радиус этой окружности. Значит, если точка P стремится к A, то отношение $AP:PQ$ стремится к $L:R=2\pi$. При этом направления сторон AP и PQ треугольника APQ стремятся к направлениям отрезков BO и AO соответ-

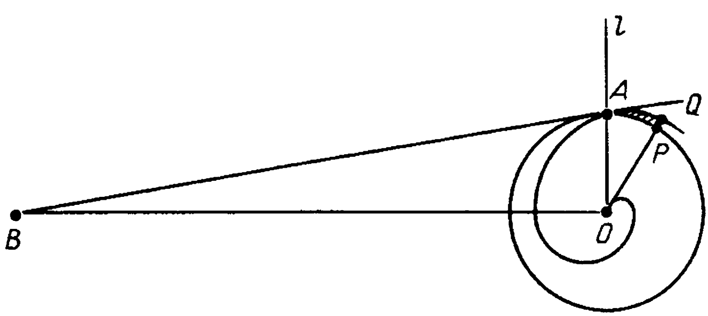

Рис. 53.

ственно. Следовательно, направление отрезка AQ стремится к направлению гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны прямым BO и AO и их отношение равно 2π. Поэтому $BO:AO=2\pi$, так как направление касательной в точке A есть предельное направление отрезка AQ.

Сам Архимед дает, конечно же, более строгое доказательство. Общая схема его доказательства напоминает приведенное выше доказательство свойства квадратрисы: оно проводится методом от противного с использованием некоторых неравенств. Доказательство у Архимеда весьма длинное, использующее много вспомогательных утверждений; поэтому мы его приводить не будем.

* * *

Для вычерчивания спирали Архимеда в 1650 г. Гюйгенс предложил инструмент, изображенный на рис. 54. Он состоит из диска, к краю которого в точке E прикреплен шнур, и рейки, шарнирно прикрепленной к центру диска. На конце рейки находится шип. Шнур обходит этот шип, обходит шип в центре диска и идет к шляпке булавки, которая может перемещаться перпендикулярно рейке. При вращении рейки перо, прикрепленное к концу булавки, вычерчивает на диске спираль Архимеда.

Имея в виду такого рода инструменты, Декарт считал, что для получения «геометрических» кривых использовать шнуры, вообще говоря, можно, но при этом прямолинейные участки шнура в процессе движения не должны заменяться криволинейными. Это было связано с тем,

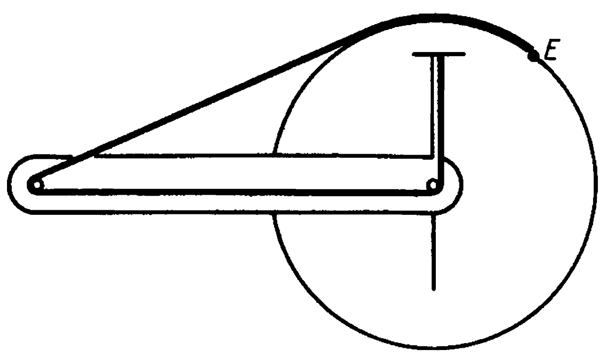

Рис. 54.

что он, как и многие другие, был уверен, что длины дуг алгебраических (т. е. «геометрических» в терминологии Декарта) кривых не могут выражаться алгебраически. Но в 1658 г., через 8 лет после смерти Декарта, алгебраическое спрямление кривой $y^2=x^3$ получили сразу три математика — Нейль, Гейрат и Ферма. Это открытие для многих, в том числе и для них самих, было потрясением.

Луночки Гиппократа (V в до н. э.)

С точки зрения математики квадратура луночек, выполненная Гиппократом Хиосским, с решением задачи квадратуры круга не связана, потому что все его примеры основаны как раз на том, что число π не входит в выражения для площадей некоторых луночек. Но исторически его деятельность непосредственно связана с попыткой решить задачу квадратуры круга. Более того, позднейшие комментаторы даже писали, будто сам Гиппократ был уверен, что он решил задачу квадратуры круга. Но это, по-видимому, просто недоразумение. Гиппократ должен был хорошо понимать, что он делал и что он сделал. Хотя он жил задолго до Евклида и Архимеда, уровень его математических познаний весьма высок.

Будем называть *луночкой* фигуру, ограниченную двумя дугами окружностей (рис. 55). Гиппократ привел три примера квадрируемых луночек, т. е луночек, для которых легко построить равновеликие им многоугольники. Наиболее известен его первый пример. Рассмотрим полукруг с диаметром AB. Пусть O — середина отрезка AB, C — середина дуги AB. Построим также полукруг на катете BC прямоугольного треугольника ABC. Тогда площадь заштрихованной на рис. 56

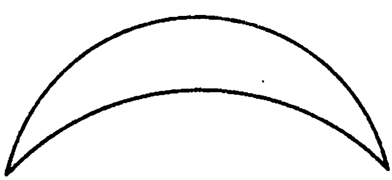

Рис. 55.

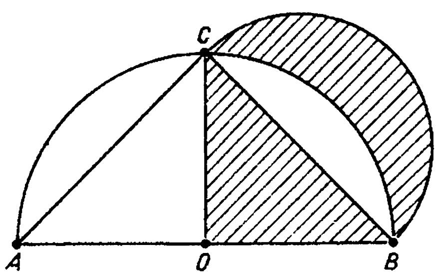

Рис. 56.

луночки равна площади прямоугольного треугольника BOC. В самом деле, как площадь сектора BOC, так и площадь полукруга с диаметром BC равна половине площади полукруга с диаметром AB. Поэтому, вырезав из этих фигур их общую часть — сегмент BC, получим равновеликие фигуры.

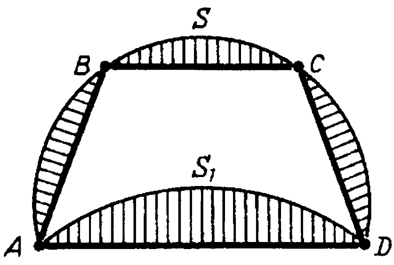

Рис. 57.

Для построения второго примера Гиппократ взял равнобедренную трапецию $ABCD$, основания BC и AD которой равны 1 и $\sqrt{3}$, а боковые стороны AB и CD равны 1. Рассмотрим луночку, ограниченную описанной окружностью S трапеции $ABCD$ и окружностью S_1, полученной из окружности S при гомотетии, переводящей отрезок BC в отрезок AD (рис. 57). Площадь сегмента AD в три раза больше площади каждого из сегментов AB, BC и CD, т. е. она равна сумме их площадей. Поэтому площадь луночки равна площади трапеции $ABCD$.

Для построения третьего примера Гиппократ взял трапецию $ABCD$, в которой основание BC и боковые стороны AB и CD равны 1 и, кроме того, $AO=OD=\sqrt{3/2}$, где O — точка пересечения диагоналей. Эту трапецию он строит следующим образом. Возьмем на луче BC такую точку E, что $BE=2BC$, и рассмотрим окружность S с диаметром BE. Пусть l — серединный перпендикуляр к отрезку BC. Используя способ «вставок», построим отрезок $OD=\sqrt{3/2}\,BC$ с концами, лежащими соответственно на прямой l и окружности S, продолжение которого проходит через точку B. Точка A симметрична точке D относительно прямой l (рис. 58).

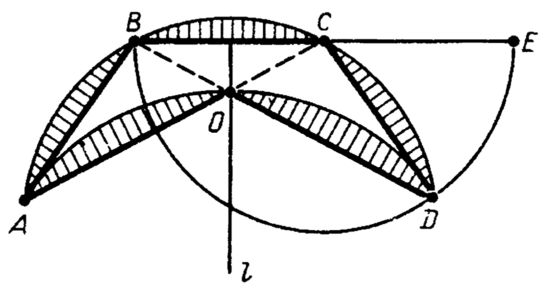

Рис. 58.

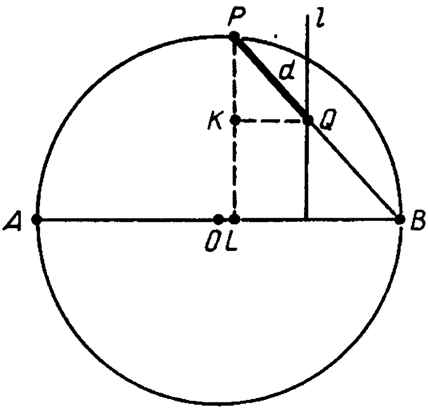

Рис. 59.

Рассмотрим описанные окружности трапеции $ABCD$ и треугольника AOD. Ясно, что площади каждого из сегментов, ограниченных хордами AO и OD, в 3/2 раза больше площади каждого из сегментов, ограниченных хордами AB, BC и CD. Поэтому площадь первых двух сегментов равна площади трех других сегментов. Следовательно, площадь луночки, ограниченной дугами $ABCD$ и AOD, равна площади многоугольника $ABCDO$.

Впоследствии конструкция Гиппократа была обобщена. Но прежде чем перейти к этому обобщению, нужно обсудить третий пример Гиппократа. Дело в том, что применение способа «вставок» в этом случае излишне: трапецию $ABCD$ можно построить с помощью лишь циркуля и линейки. Рассмотрим окружность с диаметром AB. Пусть O — центр этой окружности, l — серединный перпендикуляр к отрезку OB. Докажем, что с помощью циркуля и линейки можно вставить между окружностью и прямой l отрезок PQ данной длины d, продолжение которого проходит через точку B (рис. 59). Введем систему координат с началом в центре окружности и осью Ox, направленной по лучу OB. Пусть точка P имеет координаты (x, y). Тогда $x^2+y^2=R^2$, где R — радиус окружности, и $PQ:KQ=PB:LB$ (см. рис. 59), т. е. $d:(R/2-x)=\sqrt{y^2+(R-x)^2}:(R-x)$. Учитывая что $y^2+(R-x)^2=(y^2+x^2)+R^2-2Rx=2R(R-x)$, получим $d^2(R-x)=2R(R/2-x)^2$, т. е. x — корень квадратного уравнения. Это означает, что точку P можно построить с помощью циркуля и линейки.

Конструкцию Гиппократа можно обобщить следующим образом. Разделим дугу AB некоторой окружности на n равных частей и соединим точки A и B с точками деления (рис. 60). Точки пересечения полученных отрезков лежат на $n-2$ окружностях, проходящих через точки A и B. Если $n\varphi$ — угловая величина дуги

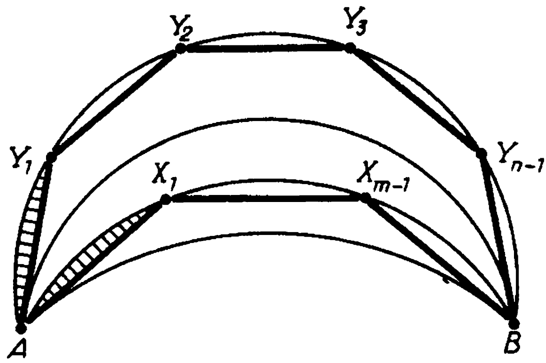

Рис. 60.

AB исходной окружности, то дуги AB этих окружностей состоят соответственно из $n-1$, $n-2$, ..., 2 дуг с угловой величиной φ. К этим окружностям следует добавить также окружность, угловая величина дуги AB которой равна φ. Площадь луночки, ограниченной дугами AY_1B и AX_1B (см. рис. 60), равна площади многоугольника $AY_1...Y_{n-1}BX_{m-1}...X_1$, если отношение площадей сегментов AY_1 и AX_1 равно m/n. В самом деле, тогда площадь n сегментов AY_1, Y_1Y_2, ..., $Y_{n-1}B$ равна площади m сегментов AX_1, X_1X_2, ..., $X_{m-1}B$. Сегменты AY_1 и AX_1 подобны, так как на них опираются равные углы ABY_1 и ABX_1. Итак, мы приходим к соотношению $AY_1^2:AX_1^2=m:n$. По теореме синусов имеем $AY_1:AX_1=\sin AX_1B:\sin AY_1B=$ $=\sin\left(\frac{2\pi-m\varphi}{2}\right):\sin\left(\frac{2\pi-n\varphi}{2}\right)=\sin m\alpha:\sin n\alpha$, где $\alpha=\varphi/2$. В итоге получаем, что если корень уравнения $\sin m\alpha:$ $:\sin n\alpha=\sqrt{m}:\sqrt{n}$ можно построить с помощью циркуля и линейки, то существует квадрируемая луночка описанного выше типа. Найденные Гиппократом примеры квадрируемых луночек соответствуют парам (1, 2), (1, 3) и (2, 3). В 1766 г. было обнаружено, что пара (1, 5) тоже соответствует квадрируемой луночке, а в 1840 г. была обнаружена еще одна такая пара — (3, 5). И лишь в 1934 г. известный советский математик Н. Г. Чеботарев доказал, что никаких других квадрируемых луночек с нечетными m и n нет. (Основная трудность заключается в том, чтобы выяснить, можно ли корень уравнения $\sin m\alpha:\sin n\alpha=\sqrt{m}:\sqrt{n}$ построить с помощью циркуля и линейки.)

Гиппократ не ограничился тем, что нашел эти весьма редкие и интересные примеры квадрируемых луночек. Он их детально исследовал: доказал, что во втором случае внешняя дуга больше 180°, а в третьем меньше 180°. По-видимому, именно это привело к недоразумению. Позднейшие древнегреческие комментаторы решили, будто Гиппократ, найдя квадрируемые луночки с внешней дугой 180°, больше 180° и меньше 180°, подумал, что тем самым он доказал квадрируемость любой луночки и квадрируемость круга. Но сочинения этих комментаторов показывают, что математику они понимали хуже Гиппократа. Так что заблуждались, скорее всего, они сами, а не Гиппократ.

Глава 4

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ТРЕХ КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Используя циркуль и линейку, можно решить задачи трисекции угла и удвоения куба. Сделать это несложно, об этом мы уже фактически рассказывали. В самом деле, циркуль позволяет на одном из краев линейки построить отрезок данной длины, а с помощью такой линейки можно решить требуемые задачи способом «вставок» (см. с. 22 и с. 37).

Такое решение вряд ли кому-нибудь понравится. Выражение «построения с помощью циркуля и линейки» имеет в геометрии вполне определенный смысл. При этих построениях циркуль используется лишь для проведения окружностей, а линейка — для проведения прямых. Строить что-либо циркулем на самой линейке не разрешается.

Приведенный пример показывает, что необходимо достаточно четко определить, что же такое «построения с помощью циркуля и линейки». В каждой задаче на построение требуется по некоторому набору исходных данных (точек, прямых, отрезков, окружностей) построить определенные точки, отрезки, окружности. (Иногда исходных данных может и не быть. Например, их нет в задаче о построении равностороннего треугольника.) Как исходные данные, так и требуемый результат можно считать наборами точек. В самом деле, отрезок задается своими концами, прямая задается двумя точками на ней, а окружность задается одной точкой на ней и центром. Итак, можно считать, что в задаче на построение требуется по одному набору точек построить другой набор точек. Точнее говоря, в процессе построений к исходному набору точек добавляются другие точки; полученный после нескольких шагов построения набор точек должен содержать все искомые точки. Остается понять, по каким правилам могут добавляться новые точки.

Через две точки данного набора с помощью линейки можно провести прямую. Через одну точку набора можно провести окружность с центром в другой точке. К данному набору точек можно добавлять точку пересечения либо двух прямых, либо двух окружностей, либо прямой и окружности. Но еще должна быть операция добавления произвольной точки. Вспомним, как строится середина отрезка AB. Для этого нужно выбрать произвольную точку C и провести окружности радиуса AC с центрами A и B. Если $AC>AB/2$, то окружности пересекаются, и их общая хорда проходит через середину отрезка AB.

Что означает в данном случае выражение «произвольная точка»? Можем ли мы при заданных точках A и B выбрать «произвольную» точку C так, что $AC=\sqrt[3]{2}AB$, и решить тем самым задачу удвоения куба? Нет, при построениях циркулем и линейкой так делать нельзя. Конечный результат не должен зависеть от выбора произвольной точки. Точнее говоря, вместо произвольной точки C мы можем взять любую другую достаточно близкую к ней точку, и при этом конечный результат не должен измениться.

Можно было бы еще рассмотреть операцию выбора произвольной точки на построенной прямой или окружности, но это не дает ничего существенно нового. Вместо того чтобы выбирать произвольную точку на прямой l или окружности S, можно выбрать две произвольные точки A и B и взять точку пересечения прямой AB с прямой l или окружностью S.

Построения циркулем и линейкой с точки зрения алгебры

Доказательство невозможности решения трех классических задач с помощью циркуля и линейки основано на алгебраических рассуждениях. Предварительно нам придется проследить, по каким алгебраическим правилам получаются координаты добавляемых точек из координат исходных точек.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат Oxy. Каждая точка имеет две координаты.

Рассмотрим набор всех численных значений координат исходных точек, не различая координаты x и y.

Теорема 1. *Предположим, что к набору точек с координатами* $t_1, \ldots, t_n$ *в процессе построений циркулем и линейкой добавилась ровно одна точка с координатами* s_1 *и* s_2. *Тогда либо число* s_i $(i=1, 2)$ *рационально, либо оно получается из чисел* $t_1, \ldots, t_n$ *применением операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.*

Доказательство. Разберем все возможные варианты добавления одной точки.

а) Добавление произвольной точки. Для любой точки найдется сколь угодно близкая к ней точка, обе координаты которой рациональны. Поэтому в качестве произвольной точки всегда мо́жно выбрать точку с рациональными координатами.

б) Добавление точки пересечения двух прямых. Прямая, проходящая через точки с координатами (a_1, b_1) и (a_2, b_2), задается уравнением

$$\frac{x-a_1}{y-b_1}=\frac{a_2-a_1}{b_2-b_1},$$

т. е. $(b_2-b_1)x+(a_1-a_2)y=a_1b_2-a_2b_1$. Коэффициенты этого уравнения получаются из координат исходных точек применением операций умножения и вычитания.

Точка пересечения прямых, заданных уравнениями

$$\begin{cases} p_1x+q_1y=r_1, \\ p_2x+q_2y=r_2, \end{cases}$$

имеет координаты

$$\left(\frac{r_1q_2-r_2q_1}{p_1q_2-p_2q_1}, \quad \frac{p_1r_2-p_2r_1}{p_1q_2-p_2q_1}\right).$$

Эти числа получаются из коэффициентов уравнений применением операций вычитания, умножения и деления. Следовательно, координаты точки пересечения двух прямых, проходящих через две пары данных точек, можно получить из координат этих четырех данных точек, применяя операции вычитания, умножения и деления.

Операция извлечения квадратного корня пока не использовалась. Она нужна лишь для нахождения координат точек пересечения прямой и окружности или двух окружностей.

в) Добавление точки пересечения прямой и окружности. Окружность с центром (a_1, b_1), проходящая через точку (a_2, b_2), имеет уравнение

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2,$$

т. е.

$$x^2-2a_1x+y^2-2b_1y=c_1,$$

где $c_1=a_2^2-2a_1a_2+b_2^2-2b_1b_2$.

Для нахождения координат точек пересечения прямой $px+qy=r$ и окружности $x^2-2ax+y^2-2bx=c$ нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} px+qy=r, \\ x^2-2ax+y^2-2by=c. \end{cases}$$

Одно из чисел p и q отлично от нуля. Будем для определенности считать, что $q\neq 0$. Тогда из первого уравнения можно получить выражение для y через x:

$$y=\frac{r-px}{q}. \qquad (1)$$

Подставив это выражение в уравнение окружности, получим квадратное уравнение

$$(p^2+q^2)x^2+2(bpq-aq^2-pr)x+(r^2-2bqr-c^2q)=0.$$

Корни x_1 и x_2 этого уравнения выражаются через его коэффициенты с помощью операций сложения, вычитания, умножения и извлечения квадратного корня. Соответствующие значения y_1 и y_2 можно получить по формуле (1).

г) Добавление точки пересечения двух окружностей. Для нахождения координат точки пересечения двух окружностей нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2a_1x+y^2-2b_1y=c_1, \\ x^2-2a_2x+y^2-2b_2y=c_2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, можно перейти к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{cases} 2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y=c_1-c_2, \\ x^2-2a_2x+y^2-2b_2y=c_2. \end{cases}$$

Система уравнений такого вида была решена при разборе случая в).

Доказательство теоремы 1 завершено.

Таким образом, циркулем и линейкой можно построить лишь те точки, координаты которых выражаются через рациональные числа и координаты данных точек с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Справедливо и обратное утверждение: если координаты точки A выражаются указанным образом через координаты данных точек, то точку A можно построить с помощью циркуля и линейки. Но для наших целей это утверждение не нужно, и мы его доказывать не будем.

Удвоение куба

Сформулируем задачу удвоения куба как задачу о построении некоторых точек по данным точкам. Пусть задан отрезок AB, т. е. заданы две точки A и B. Требуется построить такие точки C и D, что $CD=\sqrt[3]{2}\,AB$. Можно считать, что точка C совпадает с точкой A, а точка D лежит на луче AB. Введем систему координат Oxy, взяв точку A в качестве начала координат и направив ось Ox по лучу AB. Единицу длины можно выбрать так, что $AB=1$. Точки A и B имеют координаты $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Требуется построить точку с координатами $(\sqrt[3]{2}, 0)$. Предположим, что эту точку можно построить с помощью циркуля и линейки. Тогда согласно теореме 1 число $\sqrt[3]{2}$ можно получить из рациональных чисел, используя операции сложения, вычитания, деления, умножения и извлечения квадратного корня, т. е., как мы будем для краткости говорить, можно *выразить в квадратных радикалах*. Для доказательства неразрешимости задачи удвоения куба с помощью циркуля и линейки нужно доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ не выражается в квадратных радикалах.

Докажем сначала, что число $\sqrt[3]{2}$ не рационально. Предположим, что $\sqrt[3]{2}=p/q$, где p и q — натуральные числа, не имеющие общих делителей. Тогда $2q^3=p^3$, поэтому число p четно, т. е. $p=2p_1$. Следовательно, $2q^3=8p_1^3$, т. е. $q^3=4p_1^3$. Поэтому число q тоже четно, а значит, числа p и q имеют общий делитель 2. Получено противоречие.

Докажем теперь общую теорему о кубических уравнениях с рациональными коэффициентами, у которых один из корней выражается в квадратных радикалах.

Теорема 2. *Предположим, что один из корней уравнения $x^3+Ax^2+Bx+C=0$, где A, B, C — рациональные числа, выражается в квадратных радикалах. Тогда это уравнение имеет рациональный корень.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что любое число, полученное из чисел $u_1, \ldots, u_n$ применением операций сложения, вычитания, умножения и деления, можно представить в виде $\frac{P(u_1, \ldots, u_n)}{Q(u_1, \ldots, u_n)}$, где P и Q — многочлены с рациональными коэффициентами, т. е. выражения, полученные без использования операции деления. В самом деле,

$$\frac{P_1}{Q_1}\pm\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1Q_2\pm P_2Q_1}{Q_1Q_2},\quad \frac{P_1}{Q_1}\cdot\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1P_2}{Q_1Q_2},\quad \frac{P_1}{Q_1}:\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1Q_2}{P_2Q_1}.$$

Для любого числа α, выражающегося в квадратных радикалах, можно определить его *ранг* как наибольшее число расположенных один внутри другого квадратных радикалов в выражении для числа α. Это определение требует некоторой аккуратности. Дело в том, что, например, $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$, т. е. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$. Тем самым, одно выражение числа $1+\sqrt{2}$ имеет ранг 1, а другое его выражение имеет ранг 2. Поэтому нужно сначала определить ранг выражения, а в качестве ранга самого числа взять наименьший из рангов всех его выражений. Если ранг выражения R равен $n-1$, то ранг выражения $\sqrt{R}$ равен n.

Для числа α ранга n можно определить его *порядок* следующим образом. Рассмотрим для числа α все выражения ранга n. В каждое такое выражение входит некоторое количество k радикалов вида $\sqrt{R}$, где ранг выражения R равен $n-1$. Наименьшее из всех таких чисел k будем называть порядком числа α.

Кубическое уравнение $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ имеет три корня x_1, x_2, x_3 (не обязательно различных), для которых выполняется соотношение

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3+Ax^2+Bx+C.$$

В частности, $x_1+x_2+x_3=-A$.

Предположим, что один из корней этого кубического уравнения выражается в квадратных радикалах. Остальные корни могут выражаться в квадратных радикалах, а могут и не выражаться. Возьмем все корни, выражающиеся в квадратных радикалах, и выберем среди них корни с наименьшим рангом; затем среди этих корней выберем корни с наименьшим порядком. Если такой корень один, то выберем его, а если их будет несколько, то выберем любой из них. Пусть при этом выбран корень x_1 с рангом n и порядком k. Требуется доказать, что $n=0$, т. е. число x_1 рационально. Предположим, что $n \geqslant 1$. Рассмотрим для числа x_1 какое-либо выражение ранга n и порядка k. Пусть $\sqrt{R}$ — одно из выражений ранга n, входящих в это выражение. Тогда x_1 можно представить в виде

$$x_1 = \frac{a+b\sqrt{R}}{c+d\sqrt{R}}, \tag{1}$$

где выражения a, b, c и d содержат не более $k-1$ радикалов ранга n и не содержат радикалов большего ранга. Докажем, что $c-d\sqrt{R} \neq 0$. Если $d=0$, то $c \neq 0$. Если же $d \neq 0$, то из равенства $c-d\sqrt{R}=0$ следовало бы, что $\sqrt{R}=c/d$. Подставив это значение числа $\sqrt{R}$ в формулу (1), можно получить для x_1 выражение ранга не более n, содержащее не более $k-1$ радикалов ранга n. Это противоречит тому, что ранг числа x_1 равен n, а порядок равен k. Следовательно, $c-d\sqrt{R} \neq 0$, а значит,

$$x_1 = \frac{(a+b\sqrt{R})(c-d\sqrt{R})}{c^2-d^2R} = p+q\sqrt{R}.$$

Подставив значение $x_1 = p+q\sqrt{R}$ в кубическое уравнение, получим

$$0 = (p+q\sqrt{R})^3 + A(p+q\sqrt{R})^2 + B(p+q\sqrt{R}) + C = \\ = M + N\sqrt{R}.$$

Если $N \neq 0$, то $\sqrt{R} = -M/N$, а выше было показано, что такого быть не может. Следовательно, $M=N=0$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$(p-q\sqrt{R})^3 + A(p-q\sqrt{R})^2 + B(p-q\sqrt{R}) + C = \\ = M - N\sqrt{R} = 0,$$

т. е. $x_2 = p - q\sqrt{R}$ — другой корень кубического уравнения. А так как $x_1 + x_2 + x_3 = -A$, то $x_3 = -A - x_1 - x_2 = -A - 2p$. Наибольший ранг радикалов, входящих в это выражение числа x_3, не превосходит n, причем радикалов ранга n не более $k-1$. Это противоречит выбору корня x_1 как корня наименьшего ранга n и при этом наименьшего порядка k. Доказательство теоремы 2 завершено.

Следствие. *Число $\sqrt[3]{2}$ нельзя выразить в квадратных радикалах.*

Доказательство. У кубического уравнения $x^3 - 2 = 0$ есть лишь один вещественный корень, а именно, $\sqrt[3]{2}$. Число $\sqrt[3]{2}$ не рационально, поэтому уравнение $x^3 - 2 = 0$ не имеет рациональных корней. Следовательно, у этого уравнения нет корней, выражающихся в квадратных радикалах.

Трисекция угла

Для доказательства невозможности разделить любой угол на три равные части с помощью циркуля и линейки достаточно доказать, что нельзя так разделить некоторый конкретный угол. Мы докажем, что с помощью циркуля и линейки нельзя произвести трисекцию угла $30°$.

Введем систему координат Oxy, выбрав в качестве начала координат вершину данного угла AOB и направив ось Ox по стороне OA. Можно считать, что точки A и B удалены от точки O на расстояние 1. Тогда в задаче трисекции угла требуется по точке с координатами $(\cos 3\varphi,\ \sin 3\varphi)$ построить точку $(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$. В случае, когда $\varphi = 10°$, исходная точка имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. Обе ее координаты выражаются в квадратных радикалах. Поэтому достаточно доказать, что число $\sin 10°$ не выражается в квадратных радикалах.

Так как $\sin 3\varphi = \sin(\varphi + 2\varphi) = \sin\varphi\cos 2\varphi + \cos\varphi \times \sin 2\varphi = \sin\varphi(1 - 2\sin^2\varphi) + 2(1 - \sin^2\varphi)\sin\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, то число $x = \sin 10°$ удовлетворяет кубическому уравнению $3x-4x^3=\frac{1}{2}$, т. е.

$$8x^3-6x+1=0. \tag{1}$$

Согласно теореме 2 достаточно доказать, что у этого уравнения нет рациональных корней. Предположим, что $2x=p/q$, где p и q — целые числа, не имеющие общих делителей. Тогда $p^3-3pq^2+q^3=0$, т. е. $q^3=p(3q^2-p^2)$. Следовательно, число q делится на p, а значит, $p=\pm 1$. Поэтому $\pm 1 \mp 3q^2+q^3=0$, т. е. $q^2(q\pm 3)=\pm 1$. Число 1 делится на q, поэтому $q=\pm 1$. В итоге получаем, что $x=\pm 1/2$. Легко проверить, что значения $\pm 1/2$ не являются корнями уравнения (1). Получено противоречие, поэтому уравнение (1) не имеет рациональных корней, а значит, число $\sin 10°$ не выражается в квадратных радикалах.

Квадратура круга

Неразрешимость задач удвоения куба и трисекции угла связана с тем, что для их решения необходимо уметь строить корни кубических уравнений, причем эти уравнения не имеют корней, выражающихся в квадратных радикалах. Причина неразрешимости задачи квадратуры круга совсем иная. Если радиус окружности равен 1, то площадь ограниченного ей круга равна π. Поэтому сторона квадрата, площадь которого равна площади этого круга, равна $\sqrt{\pi}$. Невозможность построения числа $\sqrt{\pi}$ с помощью циркуля и линейки связана с тем, что число π (а значит, и число $\sqrt{\pi}$) не может быть корнем вообще никакого ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами; такие числа называют *трансцендентными*. Доказательство того, что число π трансцендентно, выходит далеко за рамки нашей брошюры. Его можно прочитать, например, в книге [Клейн, 1987, с. 343—352]. Мы ограничимся тем, что докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если число a выражается в квадратных радикалах, то a — корень некоторого многочлена с рациональными коэффициентами.*

Доказательство. Предположим, что число a выражается в квадратных радикалах, причем его ранг равен n, а порядок равен k. Начнем с того, что представим a как корень уравнения $x-a=0$. Выделим в коэффициенте a радикал $\sqrt{R}$ ранга n и запишем его в виде $a=b+c\sqrt{R}$, как мы уже делали раньше. Тогда $x-b=c\sqrt{R}$, а значит, $x^2-2bx+b^2-c^2R=0$. Коэффициенты этого уравнения выражаются через $k-1$ радикал ранга n и не содержат радикалов более высокого ранга. Аналогичным образом от уравнения $x^m=a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0$, где $a_i=b_i+c_i\sqrt{R}$, можно перейти к уравнению

$$(x^m-b_{m-1}x^{m-1}-\ldots-b_0)^2=(c_{m-1}x^{m-1}+\ldots+c_0)^2R.$$

Такие переходы позволяют уничтожить сначала все радикалы ранга n, затем все появившиеся радикалы ранга $n-1$ и т. д. В конце концов получим уравнение с рациональными коэффициентами.

РЕШЕНИЯ

1. Так как $S_{ABC}=S_{ADC}+S_{DBC}$, то $AC\cdot BC\sin C=AC\cdot CD\sin ACD+$ $+BC\cdot CD\sin DCB$. Кроме того, $\angle ACD=\angle C/3$ и $\angle DCB=2\angle C/3$.

2. Центральный угол AOC равен угловой величине дуги AC, а вписанный угол COB равен половине угловой величины дуги CB. Ясно также, что $\smile AC=\smile CB$.

3. Треугольники DFC и CFE имеют общий угол при вершине F, причем треугольник DFC равнобедренный. Поэтому $CE=CF$ тогда и только тогда, когда $\angle FDC=\angle FCE=\angle FDA/2$, т. е. $\smile FC=\smile AF/2$.

4. Пусть $\angle FAC=\alpha$ и $\angle FMA=\beta$. Тогда $\angle ANF=$ $=90°-\angle FMA=90°-\beta$ и $\angle NAF=90°-\angle FAC=90°-\alpha$. Кроме того, $\angle FDC=2\angle FAC=2\alpha$ и $\angle ADF=2\angle AFN=2(\angle FAM+\angle FMA)=$ $=2\alpha+2\beta$. Теперь легко проверить, что оба равенства $\angle ADF=2\angle FDC$ и $NF=FM$ эквивалентны равенству $\alpha=\beta$.

5. Возьмем на отрезке AH такую точку P, что $AP=AH-HC$. Тогда $FC=PF$ и равенство $AH=HC+FC$ эквивалентно равенству $AP=PF$. Пусть $\angle FAC=\alpha$ и $\angle AFP=\beta$. Тогда $\angle FCP=\angle FPC=\alpha+\beta$, поэтому равенство $\alpha=\beta$ эквивалентно равенству $\angle FCA=2\angle FAC$.

6. Ясно, что $\angle FDX=\angle CDX+\angle FDC$ и $\angle FQY=(\smile FY+\smile XP)/2=$ $=(\smile AY+\smile XP)/2+\smile AF/2=\angle CDX+\angle ADF/2$. Поэтому в треугольнике DFQ стороны FD и FQ равны тогда и только тогда, когда $\angle FDC=\angle ADF/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Адлер (Adler A.)

Теория геометрических построений.— Одесса: Mathesis. 1924.

Архимед

Сочинения. М.: Физматгиз, 1962.

Бос (Bos H. J. M.)

On the representation of curves in Descartes' Géometrié // Arch. Hist. Ex Sci. 1981. V. 24. P. 295—338.

Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory: the «Construction of equations». 1673—ca. 1750 // Arch. Hist. Ex. Sci. 1984. V. 30. P. 331—380.

Ван-дер-Варден (Waerden B. L. van der)

Пробуждающаяся наука. М.: Наука, 1991.

Гофман (Hofmann Jos. E)

Über Viètes Beiträge zur Geometrie der Einschiebungen // Math.-Phis. Semesterbericht. 1962. Bd 8. S. 191—214.

Декарт (Descartes R.)

Геометрия. М.; Л.: ГТТИ, 1938.

Зайденберг (Seidenberg A.)

The ritual origin of geometry // Arch. Hist. Ex. Sci. 1962. V. 1. P. 488—527.

Remarks on Nicomedes' duplication // Arch. Hist. Ex. Sci. 1966. V. 3. P. 97—101.

On the area of a semi-circle // Arch. Hist. Ex. Sci 1972. V. 9. P. 171—211.

Клейн (Klein F.)

Элементарная математика с точки зрения высшей. М.: Наука, 1987. Т. 1.

Кнорр (Knorr W. R.)

The ancient tradition of geometric problems. Boston, 1986.

Конте (Conte L.)

Proposizioni relative alla trisezione dell' argomento (Kinner—Huygens—Comiers—Bernoulli // Archimede, 1953. T. 5. P. 77—80.

Ньютон (Newton I.)

The mathematical papers. Cambridge: Univ. Press, 1968. V. 2. P. 450—517.

Прасолов В. В.

Задачи по планиметрии: В 2-х ч. Изд. 2-е. М.: Наука, 1991.

Хизс (Heath T. L.)

A history of Greek mathematics. Oxford, 1921. V. 1.

Шарыгин И. Ф.

Задачи по геометрии. Планиметрия. Изд. 2-е. М.: Наука, 1986.

Энциклопедия элементарной математики. М.: Физматгиз, 1963. Кн. 4: Геометрия. С. 205—227.

Юшкевич А. П.

История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961.